

全国 2019 年 10 月高等教育自学考试
线性代数试题
课程代码：02198

试卷说明： A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵， A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵， E 是单位矩阵， $|A|$ 表示方阵 A 的行列式。

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。

1. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则必有 ()

A. $PA=B$ B. $P^2A=B$ C. $AP=B$ D. $AP^2=B$

2. 设 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$, 则方程 $f(x)=0$ 的全部根为 ()

A. -1, 0

B. 0, 1

C. 1, 2

D. 2, 3

3. 设非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有 n 个未知数, m 个方程, 且秩 $(A)=r$, 则下列命题正确的是 ()

A. 当 $r=m$ 时方程组有解B. 当 $r=n$ 时方程组有唯一解C. 当 $m=n$ 时方程组有唯一解D. 当 $r<n$ 时方程组有无穷多解

4. 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ 的基础解系所含解向量的个数为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

5. 若方阵 A 与对角矩阵 $D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $A^6 =$ ()

A. A B. $-E$ C. E D. $6E$

6. 若向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由向量组 (II): $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示, 则 ()

A. $s < t$ B. $s = t$ C. $t < s$ D. s, t 的大小关系不能确定

7. 设 A 是 n 阶方阵, 且 $A^2=E$, 则必有 $A =$ ()



A.E

B.-E

C. A^{-1}

D. A^*

8. 下列矩阵为正交矩阵的是 ()

A. $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

9. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 ()

A. $x=0, y=0$

B. $x=1, y=1$

C. $x=1, y=0$

D. $x=0, y=1$

10. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 12x_2x_3$ 是 ()

A. 正定的

B. 半正定的

C. 负定的

D. 不定的

二、填空题(本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分)

不写解答过程, 将正确的答案写在每小题的空格内。错填或不填均无分。

11. 已知 3 阶行列式 $|A|$ 中第 3 列元素依次为 -1, 2, 0, 它们的余子式依次为 5, 3, -7, 则 $|A| =$ _____.

12. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $A^* =$ _____.

13. 向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\alpha_2 = (2, 3, 4, 5)$, $\alpha_3 = (0, 0, 1, 2)$ 的秩为 _____.

14. 设向量 $\alpha = (3, 5, 7, 9)$, $\beta = (-1, 5, 2, 0)$, 向量 γ 满足 $3\alpha - 2\gamma = 5\beta$, 则向量 $\gamma =$ _____.

15. 已知向量组 $\alpha_1 = (1, a, -2)$, $\alpha_2 = (3, 6, -6)$ 线性相关, 则 $a =$ _____.

16. 设 A 是 n 阶方阵, x_1, x_2 均为方程组 $Ax = b$ 的解, 且 $x_1 \neq x_2$, 则 $|A| =$ _____.

17. 设齐次线性方程组 $\begin{cases} -x + y = 0 \\ x + ky = 0 \\ 4x + y + z = 0 \end{cases}$ 有非零解, 则 $k =$ _____.



18. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$, 则 A 的 3 个特征值为_____.

19. 设有线性变换 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = -y_2 \end{cases}$, 则 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 中的矩阵 $P =$ _____.

20. 二次型 $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ 的负惯性指数是_____.

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

21. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 (1) A^2 ; (2) A^6 .

22. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$

23. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩.

24. 设矩阵 X 满足矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

求 X .

25. λ 取何值时, 线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 2 \\ 4x_1 - 8x_2 + 3x_3 = \lambda \end{cases}$ 有解? 在有解时求出通解.



26. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & 2a \end{pmatrix}$ 有特征值 1, 相应的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 求 a, b.

27. 用施密特正交化方法, 化线性无关向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 为正交向量

组.

28. 用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3$ 为标准形, 并写出相应的满秩线性变换.

四、证明题 (本大题共 2 小题, 每小题 6 分, 共 12 分)

29. 设 A 为实 2 阶方阵, 且 $|A| < 0$. 证明: A 与对角矩阵相似.

30. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -5 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ 的行向量依次为 α_1, α_2 和 β_1, β_2 .

证明向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 与向量组 $\{\beta_1, \beta_2\}$ 等价.

