

绝密 ★ 考试结束前

全国 2018 年 4 月高等教育自学考试
线性代数(经管类)试题
课程代码:04184

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

说明:在本卷中, A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩.

选择题部分

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。
2. 每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题:本大题共 5 小题,每小题 2 分,共 10 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 设 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -1$, 则 $\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_1 - a_2 \\ b_1 + b_2 & b_1 - b_2 \end{vmatrix} =$
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
2. 设 A 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = a \neq 0$, 将 A 按列分块为 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 若矩阵 $B = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1)$, 则 $|B| =$
A. 0 B. a C. $2a$ D. $3a$
3. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组中线性无关的是
A. $\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3$
B. $\alpha_1, 2\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_3$
C. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$
D. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$

浙 04184# 线性代数(经管类)试题 第 1 页(共 4 页)



4. 设矩阵 $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 若矩阵 A 与 B 相似, 则矩阵 $3E - A$ 的秩为

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则二次型 $x^T A x$ 的规范形为

- A. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ B. $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$ C. $z_1^2 - z_2^2$ D. $z_1^2 + z_2^2$

非选择题部分

注意事项:

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上,不能答在试题卷上。

二、填空题: 本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分。

6. 设 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1$, 若元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij} ($i, j=1, 2, 3$), 则

$A_{31} + A_{32} + A_{33} = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 已知矩阵 $A = (1, 2, -1)$, $B = (2, -1, 1)$, 且 $C = A^T B$, 则 $C = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 设 A 为 3 阶矩阵, $|A| = -\frac{1}{3}$, 则行列式 $\left| \left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} + 3A^* \right| = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2016} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2017} = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设向量 $\beta = (1, 0, 0)^T$ 可由向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T$, $\alpha_2 = (1, a, 1)^T$, $\alpha_3 = (a, 1, 1)^T$ 线性表出, 且表示法唯一, 则 a 的取值应满足 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1)^T$, $\alpha_2 = (0, -4, 5)^T$, $\alpha_3 = (2, 0, t)^T$ 的秩为 2, 则 $t = \underline{\hspace{2cm}}$.



12. 已知 $\eta_1 = (1, 0, -1)^T$, $\eta_2 = (3, -1, 5)^T$ 是 3 元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个解, 则对应齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有一个非零解 $\xi =$ _____.

13. 设 $\lambda = -\frac{2}{3}$ 为 n 阶矩阵 A 的一个特征值, 则矩阵 $2E - 3A^2$ 必有一个特征值为 _____.

14. 设 2 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $-2, 2$, 则 $A^2 =$ _____.

15. 设二次型 $f(x_1, x_2) = tx_1^2 + x_2^2 - 4tx_1x_2$ 正定, 则实数 t 的取值范围是 _____.

三、计算题: 本大题共 7 小题, 每小题 9 分, 共 63 分。

16. 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

17. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $a_i \neq 0$ ($i=1, 2, 3, 4$), 求 A^{-1} .

18. 设 3 阶矩阵 A 与 B 满足 $AB + E = A^2 + B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 B .

19. 求向量组 $\alpha_1 = (2, 1, 3, -1)^T$, $\alpha_2 = (3, -1, 2, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, 3, 4, -2)^T$, $\alpha_4 = (4, -3, 1, 1)^T$ 的秩和一个极大线性无关组, 并将其余向量由该极大线性无关组线性表出.

20. 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ -x_2 + x_3 = -2 \\ x_2 - x_3 = b \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 4 \end{cases}$$

确定 a, b 为何值时方程组有无穷多解并求出其通解 (要求用其一个特解和导出组的基础解系表示).



21. 已知 $\lambda=0$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$ (其中 $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$) 的一个特征值, 求

A 的属于特征值 $\lambda=0$ 的全部特征向量.

22. 求正交变换 $x = Qy$, 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 化为标准形.

四、证明题: 本题 7 分。

23. 设 η 为非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的一个解, ξ_1, ξ_2 为其导出组 $Ax = 0$ 的两个线性无关的解. 证明向量组 $\eta, \eta + \xi_1, \eta + \xi_2$ 线性无关.



绝密★启用前

2018年4月高等教育自学考试全国统一命题考试
线性代数（经管类）试题答案及评分参考

（课程代码 04184）

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。

1. D 2. C 3. A 4. B 5. D

二、填空题：本大题共10小题，每小题2分，共20分。

6. $\frac{1}{2}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

8. -3

9. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

10. $a \neq -2$ 且 $a \neq 1$

11. 3

12. $(2, -1, 6)^T$ （或它的非零倍数）

13. $\frac{2}{3}$

14. $4E$ 或 $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

15. $0 < t < \frac{1}{4}$

三、计算题：本大题共7小题，每小题9分，共63分。

16. 解 将行列式按第1行展开：

$$D = -2 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{-----4分}$$

$$= -2 \times 4 - 3 \times 1 = -11 \quad \text{-----9分}$$



17. 解 由于 $a_i \neq 0$ ($i=1,2,3,4$), 故 $|A| = a_1 a_2 a_3 a_4 \neq 0$, 因此 A 可逆.

设 $A = \begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}$, 其中 $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$, $A_2 = (a_4)$, 则

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} O & A_1^{-1} \\ A_2^{-1} & O \end{pmatrix} \quad \dots\dots 5 \text{分}$$

由于 $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} \end{pmatrix}$, $A_2^{-1} = \left(\frac{1}{a_4}\right)$ \dots\dots 7分

从而 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{pmatrix}$ \dots\dots 9分

18. 解 $AB+E=A^2+B$ 可化为

$$(A-E)B=(A-E)(A+E) \quad (1) \quad \dots\dots 3 \text{分}$$

由于 $|A-E| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, 故 $A-E$ 可逆 \dots\dots 6分

用 $(A-E)^{-1}$ 左乘 (1) 式两边, 得到

$$B=A+E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots 9 \text{分}$$

19. 解 由

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$



20. 解 由方程组的系数行列式 $|A|=2(a-3)=0$, 得 $a=3$

此时 $r(A)=2 < 3$, 方程组有非零解4分

$$\text{当 } a=3 \text{ 时, } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到基础解系 $\xi = \left(0, -\frac{3}{2}, 1\right)^T$ 7分

通解为 $k\xi$ (k 为任意常数).9分

21. 解 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)$$

所以 A 的 3 个特征值分别为 1, 2, 54分

解方程组 $(E - A)x = 0$ 得基础解系 $\xi_1 = (0, -1, 1)^T$;

解方程组 $(2E - A)x = 0$ 得基础解系 $\xi_2 = (1, 0, 0)^T$;

解方程组 $(5E - A)x = 0$ 得基础解系 $\xi_3 = (0, 1, 1)^T$ 7分

$$\text{取 } P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

则 $P^{-1}AP = A$ 9分

22. 解 (1) 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,2分

由于 $f(x_1, x_2, x_3)$ 为正定二次型, 则 A 的顺序主子式

$$|1| > 0, \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2 > 0, |A| = 4 - 2t^2 > 0$$

解得 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$ 6分

(2) 由于二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 正定, 所以规范形为 $f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ 9分



设 η_0 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个特解, ξ_1, ξ_2 是其导出组 $Ax=0$ 的一个基础解系. 试证明:

- (1) $\eta_1 = \eta_0 + \xi_1, \eta_2 = \eta_0 + \xi_2$ 均是 $Ax=b$ 的解;
- (2) η_0, η_1, η_2 线性无关.

证明: (1) 由于 $A\eta_0=b, A\xi_1=A\xi_2=0$, 因此
 $A\eta_i = A\eta_0 + A\xi_i = b + 0 = b \quad (i=1, 2)$

$\therefore \eta_1 = \eta_0 + \xi_1, \eta_2 = \eta_0 + \xi_2$ 均是 $Ax=b$ 的解

(2) 设 $k_1\eta_0 + k_2\eta_1 + k_3\eta_2 = 0$, 则

$$(k_1 + k_2 + k_3)\eta_0 + k_2\xi_1 + k_3\xi_2 = 0$$

等式两边左乘 A 得

$$(k_1 + k_2 + k_3)b + 0 + 0 = 0$$

由 $b \neq 0$, 得

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0$$

$$\therefore k_2\xi_1 + k_3\xi_2 = 0$$

再由 ξ_1, ξ_2 线性无关, 得 $k_2 = k_3 = 0$.

$$\therefore k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

$\therefore \eta_0, \eta_1, \eta_2$ 线性无关

