

2016 年 10 月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(一) 试卷

(课程代码 00020)

本试卷共 3 页。满分 100 分。考试时间 150 分钟。

考生答题注意事项:

1. 本卷所有试题必须在答题卡上作答。答在试卷上无效。试卷空白处和背面均可作草稿纸。
2. 第一部分为选择题。必须对应试卷上的题号使用 2B 铅笔将“答题卡”的相应代码涂黑。
3. 第二部分为非选择题。必须注明大、小题号,使用 0.5 毫米黑色字迹签字笔作答。
4. 合理安排答题空间。超出答题区域无效。

第一部分 选择题(共 30 分)

一、单项选择题(本大题共 10 小题。每小题 3 分。共 30 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的。请将其选出并将“答题卡”的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 函数 $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{4-x}$ 的定义域是
A. $[1, 4]$ B. $[1, +\infty)$ C. $(-\infty, 4]$ D. $[-4, -1]$
2. 函数 $f(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$ 的反函数 $f^{-1}(x) =$
A. $\frac{x-1}{2(1-x)}$ B. $\frac{x+1}{2(1-x)}$ C. $\frac{x-2}{2(1+x)}$ D. $\frac{x+2}{2(1+x)}$
3. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{4x^2+x+4} =$
A. 0 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. ∞
4. 函数 $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3x-4}$ 的全部间断点为
A. $x=-1$ 及 $x=4$ B. $x=-1$ 及 $x=-4$
C. $x=1$ 及 $x=-4$ D. $x=1$ 及 $x=4$



5. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 则 $f'(1) =$

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(1)}{x}$

C. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x}$

D. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

6. 函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$ 的单调减少区间为

A. $(-\infty, -1)$

B. $(5, +\infty)$

C. $(-\infty, -1)$ 与 $(5, +\infty)$

D. $(-1, 5)$

7. 若 $\int f(x) dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$, 则 $f(x) =$

A. $\frac{1}{2}e^{x^2}$

B. $\frac{1}{2}xe^{x^2}$

C. xe^{x^2}

D. e^{x^2}

8. 定积分 $\int_{-1}^1 x \sin(x^2) dx =$

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

9. 设函数 $f(x) = \int_x^2 e^{t^2 - t} dt$, 则 $f'(x) =$

A. $-e^{x^2 - x}$

B. $e^{x^2 - x}$

C. $-(2x - 1)e^{x^2 - x}$

D. $(2x - 1)e^{x^2 - x}$

10. 设函数 $z = xy2^{xy}$, 则偏导数 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,1)} =$

A. $4\ln 2 + 4$

B. $4\ln 2 - 4$

C. $\frac{4}{\ln 2} + 4$

D. $\frac{4}{\ln 2} - 4$

第二部分 非选择题(共 70 分)

二、简单计算题(本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

11. 解方程 $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} = 0$.

12. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x + x^2)}{3x}$.

13. 企业生产某产品的固定成本为 20 万元, 生产 x 件的可变成本为 $3x^2 + 2x$ 万元. 求总成本函数及边际成本.

14. 求函数 $y = x \arctan x$ 的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

15. 求微分方程 $(1 - y)dx + (1 + x)dy = 0$ 的通解.

三、计算(本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

16. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{x+1}$

17. 函数 $y=y(x)$ 是由方程 $y=\sin(x+y)$ 所确定的隐函数, 求微分 dy .



18. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - x^3}{\sin(x-3)}$.

19. 求曲线 $Y=x^2+2\ln x$ 的凹凸区间及拐点.

20. 计算定积分 $I = \int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} dx$.

四、综合题(本大题共 4 小题, 共 25 分)

21. (本小题 6 分)

已知某种商品的价格为 P (元/公斤) 时的销售量 $Q = 200 - \frac{1}{2}P$ (公斤).

(1) 问当销售量 Q 为多少时, 该商品的收益 $R(Q)$ 最大, 并求最大收益.

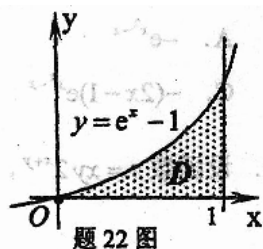
(2) 求收益最大时的价格 P .

22. (本小题 6 分)

设曲线 $y=e^x-1$ 与直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的平面图形为 D , 求:

(1) D 的面积 A ;

(2) D 绕 x 轴一周的旋转体体积 V_x .



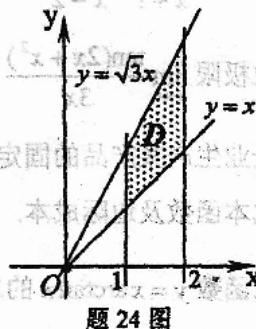
23. (本小题 6 分)

试判断点 $(0,1)$ 及 $(1,1)$ 是否为函数 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点? 若是极值点, 指出是极大值点还是极小值点.

24. (本小题 7 分)

计算二重积分 $I = \iint_D xy dx dy$, 其中 D 是由直线 $x=1$, $x=2$, $y=x$, $y=\sqrt{3}x$

所围成的平面区域.



2016 年 10 月高等教育自学考试全国统一命题考试 高等数学(一) 试题答案及评分参考

(课程代码 00020)

一、单项选择题(本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. A 2. B 3. C 4. C 5. D
6. D 7. C 8. B 9. A 10. A

二、简单计算题(本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

11. 解 通分得 $\frac{2x-1}{(x+1)(x-2)} = 0$,3 分

于是 $2x-1=0$, 则 $x=\frac{1}{2}$4 分

12. 解 1 原极限 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+x^2}{3x}$ 2 分

$= \frac{2}{3}$4 分

解 2 原极限 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x+x^2)}{2x+x^2} \cdot \frac{2x+x^2}{3x}$ 2 分

$= \frac{2}{3}$4 分

13. 解 总成本函数为 $C(x) = 3x^2 + 2x + 20$ (万元),2 分

边际成本为 $C'(x) = 6x + 2$ (万元/件).4 分

(注: 不加单位不扣分)

14. 解 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1+x^2} + \arctan x$,2 分

$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{x}{1+x^2} \right)' + (\arctan x)'$
 $= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}$4 分

高等数学(一) 试题答案及评分参考 第 1 页(共 3 页)



15. 解 分离变量得 $\frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{1+x}$,2分

两端积分 $\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{1+x}$,

得通解 $\ln|y-1| = \ln|x+1| + \ln|C|$,4分

化简得 $y = C(x+1)+1$.

三、计算题 (本大题共5小题, 每小题5分, 共25分)

16. 解 原极限 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{2x+1}\right)^{x+1}$ 2分

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{4}} \right]^{\frac{4(x+1)}{2x+1}} = e^2$,5分

17. 解 方程两端对 x 求导得 $y' = (1+y')\cos(x+y)$,3分

$y' = \frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$,4分

$dy = \frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)} dx$,5分

18. 解 由洛必达法则, 原极限 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x \ln 3 - 3x^2}{\cos(x-3)}$ 3分

$= \frac{3^3 \ln 3 - 3^3}{1} = 27(\ln 3 - 1)$,5分

19. 解 函数的定义域为 $(0, +\infty)$, $y'' = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^2-1)}{x^2}$,2分

当 $x \in (0, 1)$ 时, $y'' < 0$, 曲线在区间 $(0, 1)$ 内是凸的;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $y'' > 0$, 曲线在区间 $(1, +\infty)$ 内是凹的;

$(1, 1)$ 是拐点,5分

(注: 凹凸区间可包含区间端点)

20. 解 设 $u = \sqrt{1+x}$, 于是

$I = \int_1^2 \frac{2u(u^2-1)}{u+1} du = 2 \int_1^2 \frac{u(u-1)}{u+1} du$ 3分

$= 2 \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{3}$,5分



四、综合题 (本大题共 4 小题, 共 25 分)

21. (本小题 6 分)

解 (1) 由 $Q = 200 - \frac{1}{2}P$, 得 $P = 400 - 2Q$, 则

$$\text{收益函数 } R(Q) = PQ = 400Q - 2Q^2, \quad \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

$$\text{令 } R'(Q) = 400 - 4Q = 0, \text{ 得驻点 } Q = 100.$$

因 $R''(100) = -4 < 0$, 故当 $Q = 100$ 时, 取得最大收益

$$R(100) = 20000 \text{ 元}. \quad \cdots \cdots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 收益最大时的价格为 } P = 400 - 2 \times 100 = 200 \text{ (元/公斤)}. \quad \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

(注: 不加单位不扣分)

22. (本小题 6 分)

$$\text{解 (1) } A = \int_0^1 (e^x - 1) dx = (e^x - x) \Big|_0^1 = e - 2, \quad \cdots \cdots 3 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} (2) V_x &= \pi \int_0^1 (e^x - 1)^2 dx = \pi \int_0^1 (e^{2x} - 2e^x + 1) dx \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} e^{2x} - 2e^x + x \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{e^2}{2} - 2e + \frac{5}{2} \right). \end{aligned} \quad \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

23. (本小题 6 分)

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

因 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,1)} \neq 0$, 所以 $(0,1)$ 不是函数的驻点, 从而不是极值点.

又因 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,1)} = 0, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,1)} = 0$, 所以 $(1,1)$ 是函数的驻点. $\cdots \cdots 3 \text{ 分}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

$$A = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{(1,1)} = 6, \quad B = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)} = -3, \quad C = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{(1,1)} = 6.$$

由 $B^2 - AC = -27 < 0$ 及 $A > 0$, 可知 $(1,1)$ 是函数的极小值点. $\cdots \cdots 6 \text{ 分}$

24. (本小题 7 分)

$$\text{解 } I = \int_1^2 x dx \int_x^{\sqrt{3}x} y dy \quad \cdots \cdots 3 \text{ 分}$$

$$= \int_1^2 x \left(\frac{1}{2} y^2 \Big|_x^{\sqrt{3}x} \right) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 x (3x^2 - x^2) dx \quad \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

$$= \int_1^2 x^3 dx = \frac{15}{4}. \quad \cdots \cdots 7 \text{ 分}$$

高等数学 (一) 试题答案及评分参考 第 3 页 (共 3 页)

