D003·00020

绝密 ★ 启用前

2016年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(一)　试卷(通卡)

(课程代码　00020)

(不允许使用计算器)

姓名________　准考证号________　考试号________

本试卷分为两部分，满分100分；考试时间150分钟。

第一部分为选择题，1页至2页，共2页。应考者必须按试题顺序在“答题卡”上按要求填涂，答在试卷上无效。

第二部分为非选择题，3页至4页，共2页。应考者必须按试题顺序在“答题卡”上作答，答在试卷上无效。

第一部分 选择题（共30分）

一、单项选择题（本大题共10小题，每小题3分，共30分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其选出并将“答题卡”的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1．设$x>0$，则$\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{x}=$

A．$x^{\frac{1}{6}}$　　B．$x^{-\frac{1}{6}}$

C．$x^{\frac{5}{6}}$　　D．$x^{-\frac{5}{6}}$

2．函数$y=\sqrt{2x+7}$的定义域是

A．$[\frac{7}{2},+\infty)$　　B．$[-\frac{7}{2},+\infty)$

C．$(\frac{7}{2},+\infty)$　　D．$(-\frac{7}{2},+\infty)$

3．设函数$f(x)=\begin{cases}3x^2+2, & x\le 0\\ e^x-1, & x>0\end{cases}$，则$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$为

A．不存在　　B．0

C．1　　D．2

4. 当$x \to 1$时，下列变量为无穷小量的是

A. $\dfrac{x}{1-x}$

B. $\ln(1+x)$

C. $\cos(1-x)$

D. $\ln x$

5. 下列说法正确的是

A. 函数$f(x)$在点x_0处可导，则$f(x)$在该点连续.

B. 函数$f(x)$在点x_0处连续，则$f(x)$在该点可导.

C. 函数$f(x)$在点x_0处不可导，则$f(x)$在该点不连续.

D. 函数$f(x)$在点x_0处不可导，则$f(x)$在该点极限不存在.

6. 设函数$y=\ln(2x)$，则微分$\mathrm{d}y=$

A. $\dfrac{1}{2x}\mathrm{d}x$

B. $\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$

C. $\dfrac{1}{2x}$

D. $\dfrac{1}{x}$

7. 下列函数在区间$(-\infty,+\infty)$上单调减少的是

A. $y=\mathrm{e}^{-x}$

B. $y=\sin x$

C. $y=x^2$

D. $y=|x|$

8. 已知$x=\dfrac{\pi}{2}$是函数$f(x)=a\cos x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$的驻点，则常数$a=$

A. -3

B. -2

C. -1

D. 0

9. 微分$\mathrm{d}\left(\int a^{-2x}\mathrm{d}x\right)=$

A. a^{-2x}

B. $a^{-2x}\mathrm{d}x$

C. $-2a^{-2x}\ln a$

D. $-2a^{-2x}\ln a\,\mathrm{d}x$

10. 设函数$f(x,y)=\sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$，则偏导数$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,0)}=$

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

第二部分 非选择题（共 70 分）

二、简单计算题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11．已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$，$g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$，求复合函数 $f[g(x)]$.

12．求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{2x}$.

13．设函数 $y=\dfrac{1}{1+x}$，求二阶导数 y''.

14．求曲线 $y=x^2-x^3$ 的凹凸区间.

15．求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(2x-1)(1+y^2)$ 的通解.

三、计算题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

16．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x+b, & x<0\\ a, & x=0\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点连续，试确定常数 a，b 的值.

17．设函数 $y=\ln(1+x^2)+(\arctan x)^2$，求导数 y'.

18．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2^x+3^x)-\ln 2}{x}$.

19．计算反常积分 $I=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^3 x}\mathrm{d}x$.

20．设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-2x-2yz=\mathrm{e}^z$ 所确定的隐函数，求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

四、综合题（本大题共 4 小题，共 25 分）

21．（本小题 6 分）

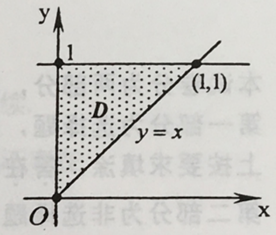
某厂生产某产品 Q 件时的总成本为 $C(Q)=\dfrac{1}{9}Q^2+3Q+96$（百元），需求函数为 $Q=81-3P$，其中 P 是产品的价格.问该厂生产多少件产品时获利最大？并求取得最大利润时的价格.

22.（本小题 6 分）

计算定积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$.

23.（本小题 6 分）

计算二重积分 $I=\iint\limits_D (x^2-2y)\,dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=1$ 及 $y=x$ 所围成的平面区域，如图所示.



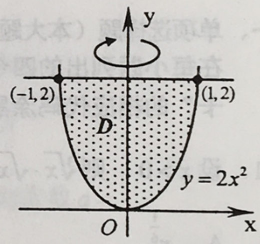
题 23 图

24.（本小题 7 分）

设 D 是由曲线 $y=2x^2$ 与直线 $y=2$ 所围成的平面区域，如图所示. 求：

（1）D 的面积 A；

（2）D 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体体积 V_y.



题 24 图

绝密★启用前

2016年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学（一）试题答案及评分参考

（课程代码 00020）

一、单项选择题（本大题共10小题，每小题3分，共30分）

1. C　　2. B　　3. D　　4. D　　5. A

6. B　　7. A　　8. C　　9. B　　10. C

二、简单计算题（本大题共5小题，每小题4分，共20分）

11. 解：$f[g(x)]=\ln\dfrac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}$ ……2分

$=\ln x$. ……4分

12. 解：原极限 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{-4}$ ……2分

$=\mathrm{e}^{-4}$. ……4分

13. 解：$y'=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$， ……2分

$y''=\dfrac{2}{(1+x)^3}$. ……4分

14. 解：$y'=2x-3x^2$，$y''=2-6x$. 令 $y''=0$，得 $x=\dfrac{1}{3}$. ……2分

因 $-\infty<x<\dfrac{1}{3}$ 时，$y''>0$，故 $(-\infty,\dfrac{1}{3})$ 为曲线的凹区间；

因 $\dfrac{1}{3}<x<+\infty$ 时，$y''<0$，故 $(\dfrac{1}{3},+\infty)$ 为曲线的凸区间. ……4分

（注：凹凸区间也可包含端点）

15. 解：分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=(2x-1)\mathrm{d}x$. ……2分

两端积分得通解 $\arctan y=x^2-x+C$. ……4分

三、计算题（本大题共5小题，每小题5分，共25分）

16. 解：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\cos x+b)=1+b$，

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$. ……3分

由于函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，故 $\dfrac{1}{2}=1+b=a$.

解得 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$. ……5分

17. 解：$y'=\dfrac{2x}{1+x^2}+\dfrac{2\arctan x}{1+x^2}=\dfrac{2(x+\arctan x)}{1+x^2}$. ……5分

（注：两项导数中每错一项扣两分）

18. 解：由洛必达法则，

原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{2^x+3^x}}{1}$ ……3分

$=\dfrac{\ln 2+\ln 3}{2}$. ……5分

19. 解：$I=\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{\ln^3 x}\mathrm{d}(\ln x)$ ……2分

$=-\dfrac{1}{2(\ln x)^2}\Bigg|_e^{+\infty}=\dfrac{1}{2}$. ……5分

20. 解：令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-2x-2yz-e^z$，则

$F_x'=2x-2$，　$F_y'=2y-2z$，　$F_z'=-2y-e^z$. ……3分

故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=\dfrac{2(x-1)}{2y+e^z}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}=\dfrac{2(y-z)}{2y+e^z}$. ……5分

四、综合题（本大题共4小题，共25分）

21.（本小题6分）

解1：总收益函数 $R(Q)=PQ=-\dfrac{1}{3}Q^2+27Q$，

总利润函数 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=-\dfrac{4}{9}Q^2+24Q-96$. ……2分

令 $L'(Q)=-\dfrac{8}{9}Q+24=0$，得唯一驻点 $Q=27$.

因为 $L''(27)=-\dfrac{8}{9}<0$，所以当 $Q=27$ 时，获利最大. ……5分

由 $27=81-3P$，得 $P=18$. 即取得最大利润时的价格为 $P=18$. ……6分

解 2：总收益函数 $R(Q)=PQ=-\frac{1}{3}Q^2+27Q$，

总利润函数 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=-\frac{4}{9}Q^2+24Q-96$． ……2 分

令 $L'(Q)=-\frac{8}{9}Q+24=0$，得唯一驻点 $Q=27$．

由问题的实际意义可知，最大值存在，

故当 $Q=27$ 时，获利最大. ……5 分

由 $27=81-3P$，得 $P=18$．即取得最大利润时的价格为 $P=18$． ……6 分

22．（本小题 6 分）

解：$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,\mathrm{d}(\sin 2x)$ ……3 分

$=\frac{1}{2}[(x\sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\mathrm{d}x]$

$=-\frac{1}{2}$． ……6 分

23．（本小题 6 分）

解 1：$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1(x^2-2y)\,\mathrm{d}y$ ……2 分

$=\int_0^1\left[(x^2y-y^2)\right]\Big|_x^1\mathrm{d}x$ ……4 分

$=\int_0^1(2x^2-1-x^3)\,\mathrm{d}x=-\frac{7}{12}$． ……6 分

解 2：$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y(x^2-2y)\,\mathrm{d}x$ ……2 分

$=\int_0^1(\frac{1}{3}x^3-2xy)\Big|_0^y\mathrm{d}y$ ……4 分

$=\int_0^1(\frac{1}{3}y^3-2y^2)\mathrm{d}y=-\frac{7}{12}$． ……6 分

24．（本小题 7 分）

解：（1）解 1 $A=2\int_0^1(2-2x^2)\,\mathrm{d}x$ ……2 分

$=\left[4(x-\frac{x^3}{3})\right]\Big|_0^1=\frac{8}{3}$． ……4 分

解 2 $A=2\int_0^2\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y$ ……2 分

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{8}{3}$． ……4 分

（2）$V_y=\int_0^2\pi x^2\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^2\frac{y}{2}\,\mathrm{d}y=\pi\frac{y^2}{4}\Big|_0^2=\pi$． ……7 分