

2019年10月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)

(课程代码 00023)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分,第一部分为选择题,第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答,答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔,书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分 选择题

一、单项选择题:本大题共5小题,每小题3分,共15分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 在空间直角坐标系中,点 $(0,0,-2)$ 在
A. x 轴上 B. y 轴上 C. z 轴上 D. oxy 平面上
2. 函数 $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ 在点 $(0,0)$ 处
A. 连续 B. 间断 C. 偏导数存在 D. 可微
3. 已知 $\cos x \cos y dx - \sin x \sin y dy$ 是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分,则 $u(x,y) =$
A. $\sin y \cos x$ B. $\sin x \sin y$ C. $-\sin x \cos y$ D. $\sin x \cos y$
4. 下列微分方程中,属于一阶线性非齐次微分方程的是
A. $3y dy = (x+y) dx$ B. $x dy = (x^2 + 3y) dx$
C. $\frac{dy}{dx} - x \sin y = 19$ D. $\frac{dy}{dx} + xy^2 = 9$
5. 下列无穷级数中,绝对收敛的无穷级数是
A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^n$
C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n+1}$



第二部分 非选择题

二、填空题:本大题共 5 空,每空 2 分,共 10 分。

6. 与向量 $\alpha = \{\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}\}$ 同方向的单位向量是_____.
7. 设函数 $f(x+y, x-y) = x^2 - y^2$, 则 $f(x, y) =$ _____.
8. 设积分区域 $D: x^2 + y^2 \leq 9$, 则二重积分 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ 在极坐标下的二次积分为_____.
9. 微分方程 $y'' + (x-1)y' + 6y = 12$ 的特解 $y^* =$ _____.
10. 设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, $f(x)$ 的傅里叶级数为 $\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$, 则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_0 =$ _____.

三、计算题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。

11. 已知平面 $\pi_1: x + 2y - z - 2 = 0$ 和平面 $\pi_2: 2x + y + z - 19 = 0$, 求这两个平面的夹角 θ .
12. 设函数 $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.
13. 设函数 $z = x \sin(x - 2y)$, 求全微分 dz .
14. 设方程 $x^z = z^x$ 确定函数 $z = z(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.
15. 设函数 $f(x, y, z) = x^3 y + y^3 z + xz^3$, 求 $\text{grad} f(1, 1, -1)$.
16. 计算二重积分 $\iint_D (1 - 2x) dx dy$, 其中积分区域 D 是由 $y = 1 - x^2$ 和 x 轴所围成的区域.
17. 计算对弧长的曲线积分 $\int_C \sqrt{1 + 4x^2} ds$, 其中 C 是 $y = x^2 (0 \leq x \leq 1)$ 一段弧.
18. 计算对坐标的曲线积分 $\int_C (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2 y - 3xy^2 + 1) dy$, 其中 C 是由 $(0, 0)$ 到 $(1, 1)$ 的直线段.
19. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ 满足初始条件 $y(0) = 1$ 的特解.



20. 求微分方程 $y'' - y = 0$ 的通解.

21. 判断无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的敛散性.

22. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的和函数.

四、综合题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

23. 求函数 $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 6y - 8$ 的极值.

24. 求曲面 $x^2 + 2y^2 - z^2 = 2$ 在点 $P_0(1, -1, 1)$ 处的法线方程.

25. 用定义证明无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 发散.



2019 年 10 月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)试题答案及评分参考

(课程代码 00023)

一、单项选择题:本大题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分。

1. C 2. A 3. D 4. B 5. A

二、填空题:本大题共 5 空,每空 2 分,共 10 分。

6. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ 7. xy 8. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 f(r^2) r dr$ 9. 2 10. π

三、计算题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。

11. 解:法向量 $n_1 = |1, 2, -1|$, $n_2 = |2, 1, 1|$

$$\text{夹角余弦 } \cos\theta = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{1}{2} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{所以夹角 } \theta = \frac{\pi}{3} \quad (2 \text{ 分})$$

12. 解:令 $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $z = \ln u$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{u} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (3 \text{ 分})$$

13. 解: $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin(x - 2y) + x \cos(x - 2y)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2x \cos(x - 2y) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } dz = [\sin(x - 2y) + x \cos(x - 2y)] dx + [-2x \cos(x - 2y)] dy \quad (3 \text{ 分})$$

14. 解:令 $F(x, y, z) = x^2 - z^2$, 则

$$F_x = 2x^{2-1}, F_z = x^2 \cdot \ln x - y \cdot z^{2-1} \quad (2 \text{ 分})$$



$$\text{所以 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{zx^{z-1}}{x^z \cdot \ln x - y \cdot z^{z-1}} = -\frac{\frac{z}{x}}{\ln x - \frac{y}{z}} \quad (3 \text{ 分})$$

$$15. \text{ 解: } \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + z^3, \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 3y^2z, \frac{\partial f}{\partial z} = y^3 + 3xz^2 \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{有 } \operatorname{grad} f(x, y, z) = [3x^2y + z^3, x^3 + 3y^2z, y^3 + 3xz^2] \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \operatorname{grad} f(1, 1, -1) = [2, -2, 4]$$

16. 解: 在直角坐标系中, 区域 D 可表示为 $0 \leq y \leq 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$.

$$\begin{aligned} \iint_D (1 - 2x) dx dy &= \int_{-1}^1 dx \int_0^{1-x^2} (1 - 2x) dy \quad (3 \text{ 分}) \\ &= \int_{-1}^1 (1 - 2x)(1 - x^2) dx = \int_{-1}^1 (2x^3 - x^2 - 2x + 1) dx \\ &= \frac{4}{3} \quad (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

17. 解: $ds = \sqrt{1 + 4x^2} dx$

$$\begin{aligned} \int_C \sqrt{1 + 4x^2} ds &= \int_0^1 (1 + 4x^2) dx \quad (3 \text{ 分}) \\ &= \frac{7}{3} \quad (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

18. 解: C 的方程为 $y = x, x$ 从 0 变到 1,

$$\begin{aligned} &\int_C (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2 + 1) dy \\ &= \int_0^1 (6x^3 - x^3) dx + (6x^3 - 3x^3 + 1) dx \quad (3 \text{ 分}) \\ &= \int_0^1 (8x^3 + 1) dx \quad (2 \text{ 分}) \\ &= 3 \end{aligned}$$

19. 解: 分离变量得方程 $y dy = x dx$

$$\begin{aligned} \text{两边积分 } \int y dy &= \int x dx, \text{ 解得 } \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} x^2 + C_0 \quad (3 \text{ 分}) \\ \text{即 } y^2 &= x^2 + C (C = 2C_0) \end{aligned}$$

$$\text{又 } \because y(0) = 1, \therefore C = 1$$

$$\text{特解为: } y^2 = x^2 + 1 \quad (2 \text{ 分})$$

20. 解: 特征方程为 $r^2 - 1 = 0$, 特征根 $r_1 = -1, r_2 = 1$. (2 分)

$$\text{所以方程通解为 } y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x \quad (3 \text{ 分})$$

高等数学(工本)试题答案及评分参考第2页(共3页)



21. 解: $u_n = \frac{n}{2^n}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n}$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$ (3分)

所以由比值审敛法知,该级数收敛. (2分)

22. 解: 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, 所以收敛半径 $R = 1$,

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛, 所以收敛域为 $[-1, 1)$ (2分)

设和函数为 $S(x)$, 即 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, x \in [-1, 1)$

而 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$.

所以 $S(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) \quad x \in [-1, 1)$ (3分)

四、综合题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

23. 解: 令 $\begin{cases} f_x(x, y) = 2x + 2y - 2 = 0 \\ f_y(x, y) = 2x - 2y + 6 = 0 \end{cases}$

解得驻点 $(-1, 2)$ (2分)

又因为 $A = f_{xx} = 2, B = f_{xy} = 2, C = f_{yy} = -2$

且 $B^2 - AC = 8 > 0$, 所以 $(-1, 2)$ 不是极值点, 该函数无极值 (3分)

24. 解: 令 $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 2$

$F_x = 2x, F_y = 4y, F_z = -2z$

$\therefore$ 在 $P_0(1, -1, 1)$ 处的法向量为 $\mathbf{n} = [2, -4, -2]$ (3分)

$\therefore$ 法线方程为: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-1}{-2}$

即: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$ (2分)

25. 证明: $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

因此级数的部分和为

$S_n = (\sqrt{1+1} - \sqrt{1}) + (\sqrt{2+1} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
 $= \sqrt{n+1} - 1$ (3分)

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - 1) = \infty$, 所以该级数发散. (2分)

