

全国 2017 年 4 月高等教育自学考试 高等数学(工本)试题与详细答案

(课程代码: 00023)

(不允许使用计算器)

本试卷分为两部分, 满分 100 分, 考试时间 150 分钟。

第一部分为选择题, 1 页至 2 页, 共 2 页。应考者必须按试题顺序在“答题卡”上按要求填涂, 答在试卷上无效。

第二部分为非选择题, 3 页至 4 页, 共 2 页。应考者必须按试题顺序在“答题卡”上作答, 答在试卷上无效。

第一部分 选择题(共 15 分)

一、单项选择题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的, 请将其选出并将“答题卡”的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 在空间直角坐标系中, 点 $(1, 2, 6)$ 关于 z 轴的对称点的坐标是

- A. $(-1, -2, 6)$ B. $(-1, -2, -6)$ C. $(-1, 2, -6)$ D. $(1, -2, 6)$

解答: 使用空间直角坐标系中对称点的关系。若点 $P(x, y, z)$ 关于 z 轴对称, 则 z 保持不变, x, y 变为其相反数, 则对称点为 $P_1(-x, -y, z)$, 所以点 $(1, 2, 6)$ 关于 z 轴的对称点的坐标是 $(-1, -2, 6)$, 选 A.

2. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 2}} \frac{7x}{x+2y}$

- A. 等于 0 B. 等于 1 C. 等于 3 D. 不存在

解答: 使用多元函数极限计算方法进行求解。将 $x=3, y=2$ 代入式子, 故

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 2}} \frac{7x}{x+2y} = \frac{7 \times 3}{3+2 \times 2} = \frac{21}{7} = 3$$

因此, 选 C.

3. 设积分区域 D 是由 $x = \sqrt{4-y^2}$, $y = x$ 及 $y = 0$ 所围成, 二重积分 $\iint_D f(x^2 + y^2) d\sigma$ 化为极坐标下的二次积分为



A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^2 f(r^2) dr$

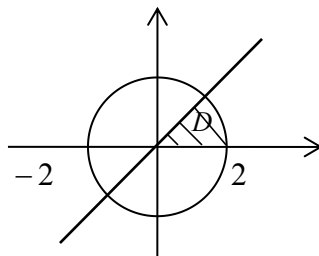
B. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^2 f(r^2) r dr$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} f(r^2) r dr$

D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} f(r^2) dr$

解答: 根据极坐标下二重积分的计算方法进行求解。由于积分区域 D 是由 $x = \sqrt{4 - y^2}$,

$y = x$ 及 $y = 0$ 所围成, 因此积分区域 D , 如下图所示



因此, 令 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, 则 $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, 从而二重积分 $\iint_D f(x^2 + y^2) d\sigma$ 变为

$$\iint_D f(x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^2 f(r^2) r dr,$$

所以选 B.

4. 以 $y = e^{-2x}$ 为特解的微分方程是

A. $y'' + 5y' + 6y = 0$

B. $y'' - 5y' + 6y = 0$

C. $y'' - y' - 2y = 0$

D. $y'' - 4y' + 4y = 0$

解答: 使用微分方程的基本概念进行选择。由于 $y = e^{-2x}$ 是微分方程的特解, 因此代入微分

方程中必使等号成立。由于 $y' = -2e^{-2x}$, $y'' = 4e^{-2x}$, 故代入 A, B, C, D 选项有

A: $y'' + 5y' + 6y = 4e^{-2x} + 5 \times (-2e^{-2x}) + 6e^{-2x} = 0$

B: $y'' - 5y' + 6y = 4e^{-2x} - 5 \times (-2e^{-2x}) + 6e^{-2x} = 20e^{-2x} \neq 0$

C: $y'' - y' - 2y = 4e^{-2x} - (-2e^{-2x}) - 2e^{-2x} = 4e^{-2x} \neq 0$

D: $y'' - 4y' + 4y = 4e^{-2x} - 4 \times (-2e^{-2x}) + 4e^{-2x} = 16e^{-2x} \neq 0$

故选 A.

5. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} (x-1)^n$ 的收敛域是



A. $[-3,3]$ B. $(-3,3)$ C. $[-2,4]$ D. $(-2,4)$

解答: 使用幂级数收敛半径相关定理进行计算。由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} (x-1)^n$ 系数为

$$a_n = \frac{1}{3^n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}}$$

故

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} (x-1)^n$ 的收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho} = 3$, 而收敛域为

$$-3 < x-1 < 3 \Rightarrow -2 < x < 4$$

当 $x=4$, 幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, 显然发散; 当 $x=-2$, 幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, 显然发散, 故

收敛域为 $(-2,4)$, 所以选 D.

第一部分 非选择题 (共 85 分)

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 2 分, 共 10 分)

6. 已知向量 $\alpha = \{4,0,3\}$, $\beta = \{2,1,5\}$, 则 $(-3\alpha) \times \beta =$ _____.

解答: 使用向量积的方法进行计算。因为 $-3\alpha = -3 \times \{4,0,3\} = \{-12,0,-9\}$, 故

$$(-3\alpha) \times \beta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -12 & 0 & -9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0i - 18j - 12k - 0k + 60j + 9i = 9i + 42j - 12k = \{9,42,-12\}.$$

7. 已知函数 $u = y^3 e^x$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} =$ _____.

解答: 使用多元函数偏导数乘法法则进行计算。由于 $u = y^3 e^x$ 为连续函数, 故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^3 e^x \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 3y^2 e^x.$$



8. 二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 y dx$ 的值是_____.

解答: 使用二次积分方法进行计算. 由于

$$\int_0^1 dy \int_y^1 y dx = \int_0^1 (xy|_y^1) dy = \int_0^1 (y - y^2) dy = \left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

9. 微分方程 $x dx + y dy = 0$ 的通解为_____.

解答: 使用分离变量法求解微分方程. 由于

$$x dx + y dy = 0 \Rightarrow -x dx = y dy$$

因此对上式左右两端同时积分, 可得

$$\int y dy = -\int x dx \Rightarrow \frac{1}{2} y^2 = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} C \Rightarrow y^2 = -x^2 + C.$$

10. 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ 的和 $S =$ _____.

解答: 使用等比级数求和公式进行计算. 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) = \frac{1}{3}$$

所以 $S = \frac{1}{3}$.

三、计算题 (本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分)

11. 求直线 $L_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$ 与直线 $L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{0}$ 的夹角 θ .

解答: 使用直线与直线的夹角公式进行计算. 由于直线 L_1 与 L_2 的方向向量分别为

$$v_1 = \{-1, 0, 1\}, \quad v_2 = \{1, 1, 0\}$$

根据直线与直线的夹角公式, 可得

$$\cos \theta = \frac{|v_1 \cdot v_2|}{|v_1| \cdot |v_2|} = \frac{|-1 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 0|}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

因此夹角

$$\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}.$$

12. 已知函数 $z = f(2xy, e^{x^2y})$, 其中 f 为可微函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.



解答: 使用复合函数的偏导数进行计算。令 $u = 2xy$, $v = e^{x^2y}$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f_u \cdot 2y + f_v \cdot e^{x^2y} \cdot 2xy = f_u \cdot 2y + f_v \cdot 2xye^{x^2y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = f_u \cdot 2x + f_v \cdot e^{x^2y} \cdot x^2 = f_u \cdot 2x + f_v \cdot x^2e^{x^2y}.$$

13. 求曲线 $x = 2 \sin t$, $y = 6 \cos t$, $z = -4 \sin^2 t$ 在对应于 $t = \frac{\pi}{4}$ 的点处的法平面方程.

解答: 使用空间曲线的法平面方程进行求解。因为 $x = 2 \sin t$, $y = 6 \cos t$, $z = -4 \sin^2 t$, 故

$$x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6 \cos \frac{\pi}{4} = 3\sqrt{2}, \quad z\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \sin^2 \frac{\pi}{4} = -2$$

又因为 $x' = 2 \cos t$, $y' = -6 \sin t$, $z' = -4 \cdot 2 \sin t \cdot \cos t$, 故当 $t = \frac{\pi}{4}$, 有

$$x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \quad y' = -3\sqrt{2}, \quad z' = -4$$

因此 $t = \frac{\pi}{4}$ 的点处的法平面方程为

$$\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + (-3\sqrt{2})(y - 3\sqrt{2}) + (-4)(z + 2) = 0 \Rightarrow \sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y - 4z + 8 = 0.$$

14. 问在空间的哪些点上, 函数 $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ 的梯度平行于 y 轴.

解答: 使用梯度公式进行计算

$$\text{grad } f(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f'_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f'_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}.$$

设空间上的点 (x_0, y_0, z_0) , 则函数 u 的梯度为

$$\begin{aligned} \text{grad } u(x_0, y_0, z_0) &= f'_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f'_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f'_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k} \\ &= (3x_0^2 - 3y_0z_0)\mathbf{i} + (3y_0^2 - 3x_0z_0)\mathbf{j} + (3z_0^2 - 3x_0y_0)\mathbf{k} \\ &= \{3x_0^2 - 3y_0z_0, 3y_0^2 - 3x_0z_0, 3z_0^2 - 3x_0y_0\} \end{aligned}$$

此时梯度平行于 y 轴, 即

$$\begin{aligned} \text{grad } u(x_0, y_0, z_0) // \{0, 1, 0\} &= \frac{3x_0^2 - 3y_0z_0}{0} = \frac{3y_0^2 - 3x_0z_0}{1} = \frac{3z_0^2 - 3x_0y_0}{0} \\ \Rightarrow 3x_0^2 - 3y_0z_0 &= 0, \quad 3z_0^2 - 3x_0y_0 \Rightarrow 3x^2 - 3yz = 0, \quad 3z^2 - 3xy \Rightarrow x = y = z. \end{aligned}$$

15. 计算二重积分 $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, 其中积分区域 $D: x^2 + y^2 \leq 9$.



解答：使用极坐标下二重积分公式进行计算。由于积分区域 D 为圆域，故令

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \text{ 其中 } 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

因此

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 [(r \cos \theta)^2 + r \sin \theta] \cdot r dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r^3 \cos^2 \theta + r^2 \sin \theta dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} r^4 \cos^2 \theta + \frac{1}{3} r^3 \sin \theta \right) \Big|_0^3 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{81}{4} \cos^2 \theta + 9 \sin \theta \right) d\theta = \frac{81}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + 9 \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{81}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} d\theta - 9 \cos \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{81}{8} \int_0^{2\pi} (\cos 2\theta + 1) d\theta - 0 \\ &= \frac{81}{8} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi} + \theta \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{81}{8} \cdot 2\pi = \frac{81}{4} \pi. \end{aligned}$$

16. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x + y + |z|) dv$ ，其中积分区域 $\Omega: x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2$ 。

解答：使用三重积分的计算方法进行求解。由于积分区域 $\Omega: x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2$ ，故有

$$\Omega: \begin{cases} x = r \cos \theta, & 0 \leq r \leq 1 \\ y = r \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = z, & 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x + y + |z|) dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^2 (r \cos \theta + r \sin \theta + z) \cdot r dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^2 r^2 \cos \theta + r^2 \sin \theta + zr dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(zr^2 \cos \theta + zr^2 \sin \theta + \frac{1}{2} z^2 r \right) \Big|_0^2 dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2r^2 \cos \theta + 2r^2 \sin \theta + 2r) dr \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3} r^3 \cos \theta + \frac{2}{3} r^3 \sin \theta + r^2 \right) \Big|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3} \cos \theta + \frac{2}{3} \sin \theta + 1 \right) d\theta = \left(\frac{2}{3} \sin \theta - \frac{2}{3} \cos \theta + \theta \right) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

17. 计算对弧长的曲线积分 $\int_C (x^2 + y^2)^3 ds$ ，其中 C 是曲线 $x = \sqrt{2 - y^2}$ 。

解答：使用弧长的曲线积分公式进行运算。由于 C 是曲线 $x = \sqrt{2 - y^2}$ ，则令



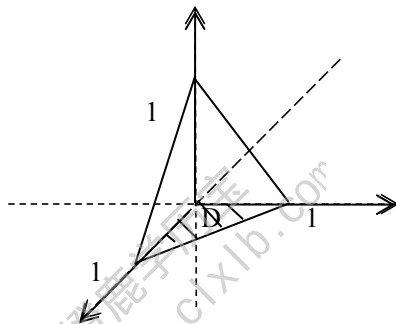
$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta, \\ y = \sqrt{2} \sin \theta, \end{cases} \text{ 其中 } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

故

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 + y^2)^3 ds &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta)^3 \sqrt{\left[(\sqrt{2} \cos \theta)' \right]^2 + \left[(\sqrt{2} \sin \theta)' \right]^2} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2^3 \sqrt{2} d\theta = 8\sqrt{2} \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 8\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

18. 计算对面积的曲面积分 $\iint_{\Sigma} (3-y-z) dS$, 其中 Σ 是平面 $x+y+z-1=0$ 在第一卦限中的部分。

解答: 使用对面积的曲面积分公式进行计算。由于 Σ 在 xOy 平面上投影 D 为 xOy 平面上由 x 轴, y 轴与联结 $(1,0)$, $(0,1)$ 两点的直线所围的三角形区域, 如图所示



又因为曲面 Σ 的方程为 $x+y+z-1=0 \Rightarrow z=1-x-y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$, 从而

$$3-y-z = 3-y-(1-x-y) = 3-y-1+x+y = 2+x$$

而

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy = \sqrt{1+1+1} dx dy = \sqrt{3} dx dy$$

故

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (3-y-z) dS &= \iint_D (2+x) \sqrt{3} dx dy = \sqrt{3} \iint_D (2+x) dx dy \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} (2+x) dx dy = \sqrt{3} \int_0^1 \left(2x + \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^{1-x} dy \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 \left(2-2x + \frac{1}{2} (1-x)^2 \right) dx = \sqrt{3} \int_0^1 \left(2-2x + \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} x^2 \right) dx \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{5}{2} x - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 \right) \Big|_0^1 = \sqrt{3} \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{6} \right) = \frac{7\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$



19. 求微分方程 $x \frac{dy}{dx} + 2y = \frac{1}{x^2}$ 的通解.

解答: 使用一阶非齐次线性微分方程通解公式进行计算. 令 $P(x) = \frac{2}{x}$, $Q(x) = \frac{1}{x^3}$, 则代入

公式得

$$\begin{aligned} y &= \left[\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right] e^{-\int P(x) dx} = \left[\int \frac{1}{x^3} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right] e^{-\int \frac{2}{x} dx} \\ &= \left[\int \frac{1}{x^3} e^{2 \ln x} dx + C \right] \cdot e^{-2 \ln x} = \left[\int \frac{e^{\ln x^2}}{x^3} dx + C \right] \cdot e^{\ln x^{-2}} \\ &= \left[\int \frac{x^2}{x^3} dx + C \right] \cdot (-x^2) = -x^2 (\ln x + C). \end{aligned}$$

20. 求微分方程 $y'' + y = 0$ 的通解.

解答: 使用二阶常系数齐次线性微分方程的解法进行计算. 所给方程的特征方程为

$$r^2 + 1 = 0$$

求得特征根为: $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, 故原方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

21. 判断无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2n}{3}$ 是否收敛, 如果收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

解答: 使用绝对收敛的判断法进行求解. 因为

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2n}{3} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 属于 p 级数, 当 $p > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, 故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2n}{3} \text{ 绝对收敛.}$$

22. 已知周期为 2π 的周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 5, & -\pi \leq x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$S(x)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 的和函数, 求 $S(5\pi)$.

解答: 使用傅里叶级数公式进行计算. 由于



$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{cases}$$

故代入计算可得

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 5 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x dx \\ &= \frac{1}{\pi} 5x \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} x^2 \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} (0 + \pi) + \frac{1}{\pi} \cdot \pi^2 = 1 + \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 5 \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x \cdot \cos nx dx \\ &= 5 \frac{1}{n\pi} \sin nx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos nx dx \\ &= 0 + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x d \sin nx \\ &= \frac{2}{n\pi} x \cdot \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \\ &= 0 + \frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{n} \end{aligned}$$

故可得

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2}(\pi + 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n} \cos nx + b_n \sin nx \right) \\ \Rightarrow S(5\pi) &= \frac{1}{2}(\pi + 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n} \cos(5n\pi) + b_n \sin(5n\pi) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

四、综合题 (本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分)

23. 将数 a^2 分为三个正数之和, 使得它们的乘积最大.



证明：使用条件极值进行计算。设三个正数分别为 x, y, z ，故有 $x + y + z = a^2$ ，构造拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = xyz + \lambda(x + y + z - a^2)$$

从而

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = yz + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = xz + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = xy + \lambda = 0 \\ x + y + z = a^2 \end{cases}$$

求解上述方程组可得 $xy = xz = yz$ ，又因为 x, y, z 均为正数，因此当 $x = y = z = \frac{a^2}{3}$ 时，三个正数乘积最大为

$$xyz = \left(\frac{a^2}{3}\right)^3 = \frac{a^6}{27}$$

24. 验证 $(5x^4 + 3xy^2 - y^3)dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)dy$ 在整个 Oxy 平面内是某个二元函数 $u(x, y)$ 的全微分，并求这样的一个 $u(x, y)$ 。

证明：令 $P(x, y) = 5x^4 + 3xy^2 - y^3$ ， $Q(x, y) = 3x^2y - 3xy^2 + y^2$ ，则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy - 3y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

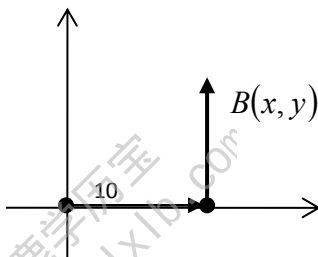
在整个 Oxy 平面内处处成立。显然根据格林公式可知，

$$(5x^4 + 3xy^2 - y^3)dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)dy$$

是某个二元函数 $u(x, y)$ 的全微分，且可取

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (5x^4 + 3xy^2 - y^3)dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)dy$$

选择积分路径如图所示



O $A(x,0)$

则有

$$\begin{aligned}
 u(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (5x^4 + 3xy^2 - y^3)dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)dy \\
 &= \int_{OA} (5x^4 + 3xy^2 - y^3)dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)dy \\
 &\quad + \int_{AB} (5x^4 + 3xy^2 - y^3)dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)dy \\
 &= \int_0^x 5x^4 dx + \int_0^y (3x^2y - 3xy^2 + y^2)dy \\
 &= x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^3 + \frac{1}{3}y^3.
 \end{aligned}$$

25. 将函数 $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ 展开成 $(x+1)$ 的幂函数.

解答: 使用函数展开成幂函数的间接法进行计算。由于

$$f(x) = \frac{1}{1-2x} = \frac{1}{3-2(x+1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2(x+1)}{3}}$$

又因为已知 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 可展开为

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

因此

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2(x+1)}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \left[1 + \frac{2(x+1)}{3} + \left(\frac{2(x+1)}{3} \right)^2 + \left(\frac{2(x+1)}{3} \right)^3 + \cdots + \left(\frac{2(x+1)}{3} \right)^n + \cdots \right] \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{2(x+1)}{3^2} + \frac{2^2(x+1)^2}{3^3} + \frac{2^3(x+1)^3}{3^4} + \cdots + \frac{2^n(x+1)^n}{3^{n+1}} + \cdots
 \end{aligned}$$

其中

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{2^n}{3^{n+1}}} = \frac{2}{3} \Rightarrow R = \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < x+1 < \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{5}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

