

2015 年 10 月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本) 试卷

(课程代码 00023)

本试卷共 3 页, 满分 100 分, 考试时间 150 分钟。

考生答题注意事项:

1. 本卷所有试题必须在答题卡上作答。答在试卷上无效。试卷空白处和背面均可作草稿纸。
2. 第一部分为选择题。必须对应试卷上的题号使用 2B 铅笔将“答题卡”的相应代码涂黑。
3. 第二部分为非选择题。必须注明大、小题号, 使用 0.5 毫米黑色字迹签字笔作答。
4. 合理安排答题空间, 超出答题区域无效。

第一部分 选择题

一、单项选择题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的, 请将其选出并将“答题卡”的相应代码涂黑。未涂、错涂或多涂均无分。

1. 已知向量 $a = \{-1, 3, 2\}$, $b = \{-3, 0, 1\}$, 则 $a \times b =$
 A. $\{3, 5, 9\}$ B. $\{-3, 5, 9\}$ C. $\{3, -5, 9\}$ D. $\{-3, -5, -9\}$
2. 已知函数 $z = e^{xy}$, 则全微分 $dz =$
 A. $e^{xy} dx$ B. $(x + y)e^{xy}$ C. $xdy + ydx$ D. $e^{xy}(ydx + xdy)$
3. 设积分区域 $D: x^2 + y^2 \leq 4$, 则二重积分 $\iint_D y d\sigma =$
 A. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 \sin\theta dr$ B. $2 \int_0^{\pi} d\theta \int_0^2 r^2 \sin\theta dr$
 C. $2 \int_0^{\pi} d\theta \int_0^2 r \sin\theta dr$ D. $4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r \sin\theta dr$
4. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + x^2 y}{y^2 + xy^2}$ 是
 A. 可分离变量的微分方程 B. 齐次微分方程
 C. 一阶线性齐次微分方程 D. 一阶线性非齐次微分方程
5. 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的敛散性为
 A. 条件收敛 B. 绝对收敛 C. 发散 D. 敛散性无法确定



第二部分 非选择题

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 2 分, 共 10 分)

请在答题卡上作答。

6. 已知点 $P(-4, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$ 和点 $Q(-1, \sqrt{3}, 2)$, 则向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的模 $|\overrightarrow{PQ}| =$ _____.

7. 已知函数 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, 则 $f(\frac{y}{x}, 1) =$ _____.

8. 设积分区域 $D: |x| \leq 1, 0 \leq y \leq a$, 且二重积分 $\iint_D d\sigma = 8$, 则常数 $a =$ _____.

9. 微分方程 $y'' + 2y = e^x$ 的特解 $y^* =$ _____.

10. 已知无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \frac{4}{2^4} + \dots$, 则 $u_7 =$ _____.

三、计算题 (本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分)

请在答题卡上作答。

11. 求过点 $A(2, 10, 4)$, 并且与直线 $x = -1 + 2t, y = 1 - 3t, z = 4 - t$ 平行的直线方程. 自考 bao 过 qq: 22695192

12. 求曲线 $x = 4\cos t, y = 4\sin t, z = 3t$ 在对应于 $t = \frac{\pi}{6}$ 的点处的法平面方程.

13. 已知方程 $x^2 + y^2 - z^2 + 2z = 5$ 确定函数 $z = z(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

14. 求函数 $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ 的梯度 $\text{grad} f(x, y)$.

15. 计算二重积分 $\iint_D xy d\sigma$, 其中 D 是由 $y^2 = x$ 和 $y = x^2$ 所围成的区域.

16. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中积分区域 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

17. 计算对弧长的曲线积分 $\int_C (x^2 y - 4) ds$, 其中 C 是从点 $A(3, 0)$ 到点 $B(3, 1)$ 的直线段.



18. 计算对坐标的曲线积分 $\int_C (x^2 - 2xy) dx$, 其中 C 为抛物线 $y=x^2$ 上从点 $A(-1, 1)$ 到点 $B(1, 1)$ 的一段弧
 自考 bao 过 qq: 22695192

19. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{\ln x}{x^2}$ 的通解.

20. 求微分方程 $y'' - y' - 6y = 0$ 的通解.

21. 判断无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n}$ 的敛散性.

22. 已知 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x) = x + 1$,

求 $f(x)$ 傅里叶级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 中系数 b_4 .

四、综合题(本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分)

请在答题卡上作答。

23. 求函数 $f(x, y) = xy + \frac{20}{x} + \frac{50}{y} (x > 0, y > 0)$ 的极值.

24. 证明对坐标的曲线积分 $\int_C (2xy + 20) dx + (x^2 + 14) dy$ 在整个 xOy 面内与路径无关.

25. 将函数 $f(x) = \frac{1}{3-4x}$ 展开为 x 的幂级数.



绝密★启用前

2015 年 10 月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)试题答案及评分参考

(课程代码 00023)

一、单项选择题(本大题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

1. C 2. D 3. A 4. A 5. B

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 2 分,共 10 分)

6. 4 7. $\frac{xy}{x^2+y^2}$ 8. 4 9. $\frac{1}{3}e^x$ 10. $\frac{7}{2^2}$

三、计算题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分)

11. 解: $\because x'=2, y'=-3, z'=-1$ 方向向量 $T=\{2, -3, -1\}$

(2 分)

 $\therefore$ 所求直线方程为 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-10}{-3}=\frac{z-4}{-1}$

(3 分)

12. 解: 对应于 $t=\frac{\pi}{6}$ 的点为 $(2\sqrt{3}, 2, \frac{\pi}{2})$, 又 $x'=-4\sin t, y'=4\cos t, z'=3$,对应 $t=\frac{\pi}{6}$ 的点处的平面法向量为 $T=\{-2, 2\sqrt{3}, 3\}$

(2 分)

所求法平面方程为 $-2(x-2\sqrt{3})+2\sqrt{3}(y-2)+3(z-\frac{\pi}{2})=0$ 即 $2x-2\sqrt{3}y-3z+\frac{3}{2}\pi=0$

(3 分)

13. 解: 设 $F(x, y, z)=x^2+y^2+2z-z^2-5$, 则 $F_x=2x, F_y=2y, F_z=2-2z$

(2 分)

 $\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{z-1}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{y}{z-1}$

(3 分)

14. 解: $\because f_x(x, y)=\frac{y}{x^2+y^2}, f_y(x, y)=-\frac{x}{x^2+y^2}$

(2 分)

 $\therefore \text{grad}f(x, y)=\{\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}\}$

(3 分)

15. 解: $\iint_D xy d\sigma = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy dy$

(2 分)

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^5) dx$$

高等数学(工本)试题答案及评分参考第 1 页(共 3 页)



$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{8} x^2 \right) \Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{12} \quad (3 \text{ 分})$$

16. 解: $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^2 r^4 \sin\varphi dr$ (2分)

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^2 r^4 dr$$

$$= \frac{4}{5} \pi a^5 \quad (3 \text{ 分})$$

17. 解: C 的方程为 $x=3 (0 \leq y \leq 1)$, $ds = \sqrt{1+0} dy = dy$

$$\int_C (x^2 y - 4) ds = \int_0^1 (9y - 4) dy$$

$$= \left(\frac{9}{2} y^2 - 4y \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \quad (3 \text{ 分})$$

18. 解: C 的方程 $y=x^2$, x 从 -1 变到 1 , 所以

$$\int_C (x^3 - 2xy) dx = \int_{-1}^1 (x^3 - 2x \cdot x^2) dx$$

$$= -\int_{-1}^1 x^2 dx$$

$$= 0 \quad (3 \text{ 分})$$

19. 解: 由 $P(x) = \frac{2}{x}$, $Q(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

得通解 $y = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[\int \frac{\ln x}{x^2} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right]$ (2分)

$$= \frac{1}{x^2} \left[\int \ln x dx + C \right]$$

$$= \frac{1}{x^2} [x \ln x - x + C]$$

$$= \frac{C}{x^2} - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \quad (3 \text{ 分})$$

20. 解: 特征方程为 $r^2 - r - 6 = 0$, 得特征根 $r_1 = -2, r_2 = 3$ (2分)

所以通解为 $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$ (3分)

21. 解: 令 $u_n = \sin \frac{\pi}{3^n}$ 自考bao过qq22695192

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} = \pi \quad (2 \text{ 分})$$

高等数学(工本)试题答案及评分参考第2页(共3页)



而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 的公比 $q = \frac{1}{3}$, $|q| < 1$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 收敛

由正项级数比较判别法极限形式, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n}$ 收敛.

(3分)

$$\begin{aligned} 22. \text{解: } b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin 4x dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x+1) \sin 4x dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin 4x dx = -\frac{1}{2\pi} [(x \cos 4x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos 4x dx] \\ &= -\frac{1}{2\pi} [\pi - \frac{1}{4} \sin 4x \Big|_0^{\pi}] = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2分)

(3分)

四、综合题(本大题共3小题,每小题5分,共15分)

$$23. \text{解: 令 } \begin{cases} f_x(x, y) = 2y - \frac{20}{x^2} = 0 \\ f_y(x, y) = x - \frac{50}{y^2} = 0 \end{cases} \quad \text{得驻点为}(2, 5)$$

(2分)

$$\text{因为 } f_{xx}(x, y) = \frac{40}{x^3}, f_{xy}(x, y) = 1, f_{yy}(x, y) = \frac{100}{y^3}$$

$$\text{且 } A = f_{xx}(2, 5) = 5, B = f_{xy}(2, 5) = 1, C = f_{yy}(2, 5) = \frac{4}{5}$$

$$\text{有 } AC - B^2 = 5 \cdot \frac{4}{5} - 1 = 3 > 0, \text{ 以及 } A > 0$$

所以函数在(2, 5)处取得极小值, 极小值为 $f(2, 5) = 30$.

(3分)

24. 解: 设 $P(x, y) = 2xy + 20, Q(x, y) = x^2 + 14$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x, \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

(2分)

在整个 xy 面内 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 从而 $\int_C (2xy + 20) dx + (x^2 + 14) dy$

在整个 xy 面内与路径无关.

(3分)

$$25. \text{解: } \because \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, (-1 < x < 1)$$

(2分)

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3-4x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{3}x}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}x\right)^n \quad \left(-\frac{3}{4} < x < \frac{3}{4}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n+1}} x^n \quad \left(-\frac{3}{4} < x < \frac{3}{4}\right)$$

(3分)

