

全国年月自考概率论与数理统计(经管类)试题

一、单项选择题(本大题共小题，每小题分，共分)

1. 设 A 、 B 是任意两个随机事件，则 $P(A \cup B)$ 为

A. $P(A) + P(\bar{B}) - P(AB)$

B. $P(A) + P(B) - P(\bar{A}\bar{B})$

C. $P(A) + P(B) - P(AB)$

D. $P(A) + P(B)$

解：本题考查的是和事件的概率公式，答案为。

2. 已知随机事件 A 、 B 满足 $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$, $P(AB) = 0.15$, 则

A. $P(B|AB) = P(B)$

B. $P(B|\bar{A}) = P(B)$

C. $P(AB|B) = P(AB)$

D. $P(A|\bar{B}) = P(A)$

解： $P(B|AB) = \frac{P(B \cap AB)}{P(AB)} = \frac{P(AB)}{P(AB)} = 1$

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} = \frac{0.5 - 0.15}{0.7} = 0.5 = P(B)$$

$$P(AB|B) = \frac{P(B \cap AB)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.5} = 0.3 = P(A)$$

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = 1, \text{ 故选}$$

3. 以下函数中能成为某随机变量分布函数的是

A. $F(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

B. $F(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

C. $F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2 + 1}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

D. $F(x) = \begin{cases} 1 - xe^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

解：本题考查的是分布函数的性质。

由 $F(+\infty) = 1$ 可知，、不能作为分布函数。

再由分布函数的单调不减性，可知不是分布函数。所以答案为。

4. 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, X 的分布函数为 $\Phi(x)$, 则 $P(|X| > 2)$ 的值为

A. $2[1 - \Phi(2)]$

B. $2\Phi(2) - 1$

C. $2 - \Phi(2)$

D. $1 - 2\Phi(2)$

解：选。

$$\begin{aligned} P\{|X| > 2\} &= P\{X > 2\} + P\{X < -2\} \\ &= 1 - P\{X \leq 2\} + P\{X < -2\} = 1 - \Phi(2) + \Phi(-2) \\ &= 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(2) = 2 - 2\Phi(2) \end{aligned}$$



5. 设二维随机变量 (X, Y) 的分布律与边缘分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	0.08	0.16	0.56	0.8
2	0.02	c	d	
$p_{\cdot j}$		0.2		

则

- A. $c=0.04, d=0.16$
C. $c=0.08, d=0.14$

- B. $c=0.02, d=0.14$
D. $c=0.04, d=0.14$

解：因为 $P(Y=2)=0.2=0.16+c$ ，所以 $c=0.04$

又 $P(X=2)=1-0.8=0.2=0.02+c+d$ ，所以 $d=1-0.02-0.04=0.14$ ，故选。

6. 设随机变量 X 服从参数为 4 的泊松分布，则下列结论中正确的是

- A. $E(X)=0.5, D(X)=0.5$
C. $E(X)=2, D(X)=4$

- B. $E(X)=0.5, D(X)=0.25$
D. $E(X)=4, D(X)=4$

解：若 $X \sim P(\lambda)$ ，则 $E(X)=D(X)=\lambda$ ，故。

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim B(36, \frac{1}{6})$, $Y \sim B(9, \frac{1}{3})$ ，则 $D(X-Y+1)=$

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

解：由方差的性质和二项分布的期望和方差：

$$D(X-Y+1)=D(X)+D(Y)=36 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + 9 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 5+2=7 \quad \text{，选。}$$

8. 设随机变量 X 的 $E(X)=8000$ ， $D(X)=1600$ ，利用切比雪夫不等式估计 $P\{7800 < X < 8200\}$ 的值为

- A. 0.04 B. 0.20 C. 0.96 D. 1.00

解：由切比雪夫不等式 $P\{|X-E(X)| < \varepsilon\} > 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ ，可得

$$P\{7800 < X < 8200\} = P\{|X-8000| < 200\} > 1 - \frac{1600}{200^2} = 0.96 \quad \text{，选。}$$

9. 设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本， $\bar{X}$ 是样本均值，那么

$$E(\bar{X}^2) =$$

- A. $\mu^2 + \sigma^2$ B. $\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$ C. μ^2 D. $\frac{\mu^2}{n}$

解：由方差的计算公式 $D(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - E(\bar{X})^2$ ，

$$\text{可得 } E(\bar{X}^2) = D(\bar{X}) + E(\bar{X})^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \quad \text{，选。}$$

10. 置信度 $(1-\alpha)$ 表达了置信区间的

- A. 准确性 B. 精确度 C. 显著性 D. 可靠度

解：置信度表达了置信区间的可靠度，选。



二、填空题(本大题共小题, 每小题分, 共分)

11. 某射手射击的命中率为 0.6, 在 4 次射击中有且仅有 3 次命中的概率是_____.

解: 本题为贝努利概型。次射击中命中次的概率为 $C_4^3(0.6)^3 \cdot (0.4) = 4 \times (0.6)^3 \times (0.4) = 0.3456$

12. 设 A 与 B 是两个相互独立随机事件, $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.7$ 则 $P(A - B) =$ _____.

解: $p(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = 0.2 - 0.14 = 0.06$

13. 设 A, B 是两个随机事件, 若 $P(A) = 0.8$, $P(A - B) = 0.5$, 则 $P(B|A) =$ _____.

解: 因为 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$, 所以可得 $P(AB) = P(A) - P(A - B) = 0.3$

所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.8} = \frac{3}{8}$

14. 设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k) = k/a (k=1, 2, 3)$, 则 $a =$ _____.

解: 可以得到的分布律为

$P(X=1) = \frac{1}{a}, P(X=2) = \frac{2}{a}, P(X=3) = \frac{3}{a}$, 由分布律的性质, 可得 $\frac{1}{a} + \frac{2}{a} + \frac{3}{a} = \frac{6}{a} = 1$, 故 $a = 6$ 。

15. 设 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ λ 为正参数

若 $P\{X < 1\} = 0.3$ 则 $P\{X < 2\} =$ _____.

解: $P\{X < 1\} = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^1 = 1 - e^{-\lambda} = 0.3 \Rightarrow e^{-\lambda} = 0.7$

所以 $P\{X < 2\} = \int_0^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^2 = 1 - e^{-2\lambda} = 1 - (e^{-\lambda})^2 = 0.51$

16. 设随机变量 X 的分布律为:

X	-2	-1	0	1
p_i	0.3	0.2	0.4	0.1

则 $P\{-2 < X < 1\} =$ _____.

解: $P\{-2 < X < 1\} = P\{X = -1\} + P\{X = 0\} = 0.2 + 0.4 = 0.6$

17. 设 $f(x, y)$ 为二维随机变量 (X, Y) 的密度函数, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy =$ _____.

解: 此题为二维随机变量密度函数的性质, 答案为。

18. 二维随机变量 (X, Y) 的分布律为

$X \backslash Y$			
	1	2	3
1	0.2	0.1	0.1
2	0.3	0.3	0

则 $P\{XY = 2\} =$ _____.

解: $P\{XY = 2\} = P\{X = 1, Y = 2\} + P\{X = 2, Y = 1\} = 0.4$



19. 已知随机变量 X 的分布律为

X	-2	1	C
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

已知 $E(X)=1$, 则常数 $C=$ _____.

解: $E(X) = -2 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + C \times \frac{1}{4} = \frac{C}{4} = 1$, 所以 $C=4$ 。

20. 已知 $E(X)=-1, D(X)=3$, 则 $E(3X^2-2)=$ _____.

解: $D(X) = E(X^2) - E(X)^2 \Rightarrow E(X^2) = D(X) + E(X)^2 = 4$ 所以 $E(3X^2-2) = 3E(X^2) - 2 = 10$ 。

21. 一个二项分布的随机变量, 其数学期望与方差之比为 $4/3$, 则该分布的参数

$p =$ _____.

解: 若 $X \sim B(n, p)$, 则 $E(X) = np, D(X) = np(1-p)$,

由题意, 有 $\frac{E(X)}{D(X)} = \frac{np}{np(1-p)} = \frac{1}{1-p} = \frac{4}{3}$, 则可得 $p = \frac{1}{4}$ 。

22. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为其样本, 则参数 σ^2 的矩估计值

$\hat{\sigma}^2 =$ _____.

解: 矩估计中用样本二阶中心距 s_n^2 估计总体方差。即 $\hat{\sigma}^2 = s_n^2$ 。

23. 设制造某种单件产品所需工时(单位: 小时)服从正态分布, 为了估计制造这种产品所需的单件平均工时, 现制造 4 件, 记录每件所需工时如下:

10.5, 11, 11.2, 12.5

若确定置信度为 0.95, 则平均工时的置信区间为 _____.

($t_{0.05}(3) = 2.3534$, $t_{0.025}(3) = 3.1824$)

解: 总体方差未知时, 均值的置信区间为 $\left(\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$

经计算 $\bar{X} = 11.3$, $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 1.09, s = 1.04$ 所以平均工时的置信区间为

$$\left(\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = (11.3 \pm 3.1824 \times \frac{1.04}{2}) = (11.3 \pm 1.65) = (9.65, 12.95)$$

24. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma_0)$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为其样本, 方差 σ_0 已知, $\bar{x}$ 为样本均值, 则对于假设检验问题 $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$, 应选用的统计量是 _____.

解: 总体方差已知, 对均值的进行检验时用的统计量为 $U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$



25. 已知一元线性回归方程为 $\hat{Y} = 1 + \hat{\beta}_1 x$, 且 $\bar{x} = 2$, $\bar{y} = 9$, 则 $\hat{\beta}_1 =$ _____.

解: 估计回归方程时: $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 1$

$$\text{所以 } \hat{\beta}_1 = \frac{\bar{y} - 1}{\bar{x}} = \frac{9 - 1}{2} = 4$$

三、计算题(本大题共小题, 每小题分, 共分)

26. 对同一目标进行三次独立射击, 第一次、第二次、第三次射击的命中率分别为 0.4, 0.5, 0.7, 求在这三次射击中, 恰好有一次击中目标的概率.

解: 设 A_1 {第一次命中}, $P(A_1) = 0.4$

A_2 {第一次命中}, $P(A_2) = 0.5$

A_3 {第一次命中}, $P(A_3) = 0.7$

由于三次射击是独立的, 所以恰好有一次击中目标的概率为:

$$P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} \overline{A_3})$$

$$P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)$$

$$0.4 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.7 = 0.36$$

27. 设随机变量 X 在 1, 2, 3, 4 四个整数中等可能的取值, 另一随机变量 Y 在 $1 \sim X$ 中等可能的取值, 试求 $X - Y$ 的分布律.

解: (X, Y) 的分布律为:

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$			
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$		
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

四、综合题(本大题共小题, 每小题分, 共分)

28. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ Ax^2, & 0 \leq x < 1, \\ Ax, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$

试求: (1) 系数 A ;

(2) X 的概率密度;

(3) $P\left\{0 < X \leq \frac{3}{2}\right\}$.



解: () X 的概率密度函数为 $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2Ax, & 0 \leq x < 1 \\ A, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

由性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, 有 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 2Axdx + \int_1^2 Adx = Ax^2 \Big|_0^1 + A = 2A = 1$

则 $A = \frac{1}{2}$

() 所以 X 的概率密度函数为 $f(x) = F'(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

() $P\{0 < x \leq \frac{3}{2}\} = F(\frac{3}{2}) - F(0) = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}$

29. 设甲、乙两射手, 他们的射击技术分别如题 29(a) 表、题 29(b) 表所示. 其中 X, Y 分别表示甲、乙两射手射击环数的分布情况:

X	8	9	10
P	0.4	0.2	0.4

Y	8	9	10
P	0.1	0.8	0.1

题 29(a) 表

题 29(b) 表

现要从中选拔一名射手去参加比赛, 试讨论选派哪位射手参赛比较合理?

解: $E(X) = 8 \times 0.4 + 9 \times 0.2 + 10 \times 0.4 = 9$

$E(Y) = 8 \times 0.1 + 9 \times 0.8 + 10 \times 0.1 = 9$

由此可见甲乙射击的平均环数是相同的。

$D(X) = E[X - E(X)]^2 = 1 \times 0.4 + 0 + 1 \times 0.4 = 0.8$

$D(Y) = E[Y - E(Y)]^2 = 1 \times 0.1 + 0 + 1 \times 0.1 = 0.2$

从方差上看, 乙的射击水平更稳定, 所以选派乙去参赛。

五、应用题(分)

30. 某镇居民日收入服从正态分布, 现随机调查该镇 25 位居民, 得知他们的平均收入 $\bar{x} = 66.4$ 元, 标准差 $s = 15$ 元, 试问:

(1) $\alpha = 0.05$ 下, 是否可以认为该镇居民日平均收入为 70 元?

(2) 在 $\alpha = 0.05$ 下, 是否可以认为该镇居民日收入的方差为 16^2 ?

$t_{0.025}(24) = 2.064, t_{0.05}(24) = 1.7109, u_{0.025} = 1.96, u_{0.05} = 1.65$

$\chi_{0.025}^2(24) = 39.4, \chi_{0.05}^2(24) = 36.4$

$\chi_{0.975}^2(24) = 12.4, \chi_{0.95}^2(24) = 13.848$

解: () 提出零假设: $\mu: \mu \neq$. 选择统计量 $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$

于是 $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = \frac{66.4 - 70}{15 / 5} = -1.2$

由检验水平 $\alpha =$, $t_{0.025}(24) = 2.064$



拒绝域为 $|t| \geq t_{0.025}$ ，由于 $|t| = 1.2 < 2.064$ ，从而不能否定。

所以不能认为该镇居民日平均收入为元。

() 提出零假设： $\sigma^2 = 16^2$ ； $\sigma^2 \neq 16^2$ 。

选择统计 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

由给定的样本值，计算得到 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{24 \times 15^2}{16^2} = 21.09$

由检验水平 $\alpha =$ ，

拒绝域为 $\chi^2 > \chi_{0.025}^2(24) = 39.4$ 或 $\chi^2 < \chi_{0.975}^2(24) = 12.4$

由于 $\chi^2 = 21.09$ ，没有落入拒绝域。

从而不能认为该镇居民日平均收入的方差为 16^2 。

五、其他常考大题题型

例. 设某地区地区男性居民中肥胖者占，中等者占，瘦者占，又知肥胖者患高血压病的概率为，中等者患高血压病的概率为，瘦者患高血压病的概率为，试求：

() 该地区成年男性居民患高血压病的概率；（第一章，全概率公式）

() 若知某成年男性居民患高血压病，则他属于肥胖者的概率有多大？（第一章，贝叶斯公式）

解：设 A_1 {肥胖者}， A_2 {中等者}， A_3 {瘦者}

{患高血压病}

已知 $P(A_1)$ ， $P(A_2)$ ， $P(A_3)$

$$P(B|A_1), P(B|A_2), P(B|A_3)$$

() $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$

() $P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.25 \times 0.2}{0.101} \approx 0.495$

例. 设随机变量的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x < 0 \\ 1-x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 试求()及 ()。

（第四章，连续型随机变量的期望和方差求法）

解： $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-1}^0 x(1+x)dx + \int_0^1 x(1-x)dx = 0$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-1}^0 x^2(1+x)dx + \int_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{6}$$

$$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{1}{6}$$



例 设某行业的一项经济指标服从正态分布 (μ, σ) ，其中 μ, σ 均未知. 今获取了该指标的个数据作为样本，并算得样本均值 $\bar{x}$ ，样本方差 S^2 . 求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间. (附: $t_{\alpha/2}(n-1)$) (第七章，对 μ 估计，方差已知)

解： 分析：对 μ 估计，方差未知，置信区间为 $\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot S / \sqrt{n}$

计算得 $\bar{x} = 56.93$ ， $\alpha = 0.05$ ， $t_{0.025} = 2.306$ ， $S = 0.93$ ， $n = 9$

故 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为：

$$\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot S / \sqrt{n} = 56.93 \pm 2.306 \times 0.93 / 3$$

即 $(56.215, 57.645)$ 。

例. 设总体的概率密度 $f(x; \theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 其中未知参数 $\theta > -1$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是来自该总体的

一个样本，求参数 θ 的矩估计和极大似然估计. (第七章，矩估计和极大似然估计)

解： (一) 矩估计

$$\text{总体期望 } E(X) = \int_0^1 x(\theta+1)x^\theta dx = \int_0^1 (\theta+1)x^{\theta+1} dx = (\theta+1) \cdot \frac{1}{\theta+2} x^{\theta+2} \Big|_0^1 = \frac{\theta+1}{\theta+2}$$

$$\text{建立矩估计方程 } E(X) = \bar{X}, \text{ 即 } \frac{\theta+1}{\theta+2} = \bar{X}$$

$$\text{解得 } \theta \text{ 的矩估计量为 } \hat{\theta} = \frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}$$

(二) 极大似然估计

$$\text{似然函数 } L(\theta) = \prod_{k=1}^n f(x_k, \theta) = \prod_{k=1}^n (\theta+1)x_k^\theta = (\theta+1)^n \cdot \prod_{k=1}^n x_k^\theta$$

$$\text{取对数 } \ln L(\theta) = \ln[(\theta+1)^n \cdot \prod_{k=1}^n x_k^\theta] = n \ln(\theta+1) + \theta \ln \sum_{k=1}^n x_k$$

$$\text{对 } \theta \text{ 求导 } \frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = \frac{n}{\theta+1} + \ln \sum_{k=1}^n x_k = 0$$

$$\text{解得 } \theta \text{ 的极大似然估计量为 } \hat{\theta} = -\frac{n}{\ln \sum_{k=1}^n x_k} - 1$$

