

2022 年 4 月高等教育自学考试全国统一命题考试

线性代数

(课程代码 02198)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答, 答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用 2B 铅笔, 书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

说明: 在本卷中, A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩。

第一部分 选择题

一、单项选择题: 本大题共 5 小题, 每小题 2 分, 共 10 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 设 $f(x) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -x + a$, 则数 $a =$

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

2. 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, A_{ij} 为元素 a_{ij} ($i, j = 1, 2$) 的代数余子式, 若 $A_{11} = 1, A_{12} = 2$,

$A_{21} = 3, A_{22} = 4$, 则 $A =$

A. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

3. 对于向量组 $\alpha_1 = (a_{11}, a_{21})^T, \alpha_2 = (a_{12}, a_{22})^T$ 与向量组 $\beta_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})^T,$

$\beta_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})^T$, 下列结论中正确的是

A. 若 α_1, α_2 线性无关, 则 β_1, β_2 线性无关

B. 若 α_1, α_2 线性相关, 则 β_1, β_2 线性相关

C. 若 α_1, α_2 线性无关, 则 β_1, β_2 线性相关

D. 若 α_1, α_2 线性相关, 则 β_1, β_2 线性无关

4. 设 2 阶矩阵 A 与 B 相似, 若 B 的特征值 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3$, 则 $A - E$ 的迹为

A. -6

B. -1

C. 1

D. 6

5. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_2x_3$ 的矩阵是

A. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6. 设 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ ，其代数余子式为 A_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$)，

则 $A_{12} - A_{22} + 2A_{32} =$ _____.

7. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ，则 $AB =$ _____.

8. 设 A 为 3×4 矩阵， $r(A) = 2$ ，矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，则 $r(BA) =$ _____.

9. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ，则 $A^{-1} =$ _____.

10. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系为 _____.

11. 向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T$ ， $\alpha_2 = (3, 0, -9)^T$ ， $\alpha_3 = (1, 2, 3)^T$ 的秩为 _____.

12. 若 3 阶可逆矩阵 A 的特征值分别是 1, -1, 2，则 $|A^{-1}| =$ _____.

13. 若线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + ax_3 = 2 \end{cases}$ 无解，则数 $a =$ _____.

14. 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -3)^T$ ， $\alpha_2 = (k, 4, -6)^T$ 线性相关，则数 $k =$ _____.

15. 二次型 $f(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 4x_1x_2$ 经可逆线性变换 $\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 \\ x_2 = 2y_1 + y_2 \end{cases}$ ，化为二次型 _____.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$.

17. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A^* .

18. 设矩阵 X, A 满足关系式 $XA = X + A$, 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X .

19. 确定 k 的值使向量组 $\alpha_1 = (1, 1, k)^T$, $\alpha_2 = (1, k, 1)^T$, $\alpha_3 = (k, 1, 1)^T$ 线性相关, 并求出一个极大无关组, 将其余向量由该极大无关组线性表出.

20. 求线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 6x_4 = -5 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$ 的通解 (要求用其一个特解和导出组的基础

21. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & 2 & 0 \\ y & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征值为 -3 , 且 $|A| = -12$, 求 x, y 的值.

22. 设 3 元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$, 确定当 t 为何值时, 该二次型正定.

四、证明题：本题 7 分。

23. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量组 $\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\beta_2 = -\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3$,

$\beta_3 = 3\alpha_1 + 6\alpha_3$. 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关.