



绝密★启用前

2021 年 10 月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工专)

(课程代码 00022)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分,第一部分为选择题,第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答,答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用 2B 铅笔,书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分 选择题

一、单项选择题:本大题共 5 小题,每小题 2 分,共 10 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 函数 $y = \frac{1}{2^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内是

- A. 有界函数 B. 常量 C. 无界函数 D. 单增函数

2. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} =$

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

3. 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{n\pi}{2}$, 下面选项中正确的是

- A. 该级数的和为 0 B. 该级数可能收敛
C. 该级数发散 D. 该级数收敛

4. 定积分 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2 \sin x}{1+x^2} dx =$

- A. 2π B. π C. 1 D. 0

5. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $AB =$

- A. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

高等数学(工专) 试题第1页(共3页)



第二部分 非选择题

二、填空题:本大题共 8 空,每空 4 分,共 32 分。

6. 函数 $y = \sqrt{x^2 + 2x - 8} - \ln x$ 的定义域为_____.

7. 极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{x} + e^x) =$ _____.

8. 曲线 $y = x^2 - 1$ 在点 $(1, 0)$ 处的法线的斜率为_____.

9. 设 $y = xe^x$, 则 $y'' =$ _____.

10. $\int_0^1 e^{3x+2} dx =$ _____.

11. 曲线 $y = x^2$ 与 $x = 1$ 及 x 轴所围成的平面图形的面积为_____.

12. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} =$ _____.

13. 设二阶方阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$, 则 $|A^5| =$ _____.

三、计算题:本大题共 7 小题,每小题 6 分,共 42 分。

14. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(x - \frac{\pi}{2})^2}$.

15. 设 $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$, 求 dy .

16. 设 $y = f(u)$, 而 $u = g(\cos x)$, 其中 f, g 是可导函数, 复合函数 $y = f[g(\cos x)]$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

17. 求不定积分 $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

18. 求函数 $y = x^4 - 2x^2$ 的极值.

19. 计算定积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$.

20. 问 k 取何值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + kx_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解.



四、综合题：本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分。

21. 证明：当 $x > 1$ 时， $e^x > ex$.

22. 求由 $y = x$, $x = 2$ 及 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

绝密★启用前

2021 年 10 月高等教育自学考试全国统一命题考试
高等数学(工专)试题答案及评分参考

(课程代码 00022)

一、单项选择题:本大题共 5 小题,每小题 2 分,共 10 分。

1. A 2. D 3. C 4. D 5. B

二、填空题:本大题共 8 空,每空 4 分,共 32 分。

6. $[2, +\infty)$ 或 $x \geq 2$

7. 0

8. $-\frac{1}{2}$

9. $2e^x + xe^x$ 或 $(x+2)e^x$

10. $\frac{1}{3}(e^3 - e^2)$

11. $\frac{1}{3}$

12. $(a+2)(a-1)^2$

13. 32

三、计算题:本大题共 7 小题,每小题 6 分,共 42 分。

14. 解: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(x - \frac{\pi}{2})^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{2(x - \frac{\pi}{2})} \quad (3 \text{ 分})$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2(x - \frac{\pi}{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{2} = -\frac{1}{2}. \quad (3 \text{ 分})$$

15. 解: $\frac{dy}{dx} = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}, \quad (4 \text{ 分})$

$$dy = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} dx. \quad (2 \text{ 分})$$

16. 解: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (3 \text{ 分})$

$$= f'(u) \cdot g'(\cos x) \cdot (-\sin x)$$

$$= -f'(u) \cdot g'(\cos x) \cdot \sin x = -f'[g(\cos x)]g'(\cos x)\sin x. \quad (3 \text{ 分})$$

高等数学(工专)试题答案及评分参考第1页(共3页)

17. 解: $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x d(\ln x)$ (3分)

$$= \frac{\ln^3 x}{3} + C. \quad (3分)$$

18. 解: 函数 $y = x^4 - 2x^2$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内二阶可导, 并且

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1).$$

令 $y' = 0$ 得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. (2分)

又因为 $y'' = 12x^2 - 4$, 从而

$$y''(0) = -4 < 0, y''(-1) = y''(1) = 8 > 0, \quad (2分)$$

因此, 函数在 $x=0$ 处取得极大值, 极大值为 $y(0)=0$, 分别在 $x=-1$ 和 $x=1$ 处取得极小值, 极小值为 $y(-1)=y(1)=-1$. (2分)

19. 解: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x} dx = - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \cot x dx$ (2分)

$$= - \left[x \cot x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x dx \quad (2分)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2. \quad (2分)$$

20. 解: 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{方程组有非零解.} \quad (2分)$$

$$\begin{aligned} \text{而 } D &= \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & k+1 \end{vmatrix} \\ &= -3(k-1), \end{aligned} \quad (2分)$$

故 $-3(k-1)=0$, 即 $k=1$ 时, 方程组有非零解. (2分)

四、综合题:本大题共2小题,每小题8分,共16分。

21. 证明: 设 $f(x) = e^x - ex$, (2分)

$f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续, 在 $(1, +\infty)$ 内可导, 并且在 $(1, +\infty)$ 内

$$f'(x) = e^x - e > 0.$$

所以, 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调增加. (3分)

故当 $x > 1$ 时,

$$f(x) > f(1) = 0, \text{ 即 } e^x - ex > 0$$

于是, $x > 1$ 时, $e^x > ex$. (3分)

22. 解: 所求体积

$$V = \pi \int_0^2 x^2 dx \quad (4分)$$

$$= \pi \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3} \pi. \quad (4分)$$