



全国 2021 年 10 月高等教育自学考试
线性代数(经管类)试题

课程代码:04184

1. 请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。
2. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

说明: 在本卷中, A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩.

选择题部分

注意事项:

每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题：本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 已知 2 阶行列式 D 的第 1 行元素及其余子式都为 a , 则 D 的值为

A. 0

B. a^2
$$C. -a^2$$

D. $2a^2$

2. 若 A, B, C 均是 n 阶矩阵, 且满足 $ABC = E$, 则 $B^{-1} =$

A. AC

B. CA

C. $A^{-1}C^{-1}$

D. $C^{-1}A^{-1}$

3. 设向量组 $(1,1,1)^T, (a,1,0)^T, (1,b,0)^T$ 线性相关, 则数 a, b 可取值为

A. $a = 0, b = 0$

B. $a = 0, b = 1$

C. $a = 1, b = 0$

D. $a=1, b=1$



4. 设非齐次线性方程组 $Ax = b$ ，其中 A 为 $m \times n$ 阶矩阵， $r(A) = r$ ，则

- A. 当 $r = n$ 时， $Ax = b$ 有惟一解
- B. 当 $r < n$ 时， $Ax = b$ 有无穷多解
- C. 当 $r = m$ 时， $Ax = b$ 有解
- D. 当 $m = n$ 时， $Ax = b$ 有惟一解

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，则 A 与 B 的关系为

- A. 相似且合同
- B. 相似但不合同
- C. 不相似但合同
- D. 不相似且不合同

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上。

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6. 行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij} ($i, j = 1, 2$)，则 $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} =$ _____.

7. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 是 3 维列向量，且 3 阶行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \beta_1| = m$ ， $|\alpha_2, \beta_2, \alpha_1| = n$ ，则 $|\alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| =$ _____.

8. 若 $\alpha = (1, 2, 3, 4)^T$ ，则 $\alpha^T \alpha =$ _____.

9. 设 A 为 2 阶矩阵，将 A 的第 1 行与第 2 行互换得到矩阵 B ，再将 B 的第 2 行加到第 1 行得到单位矩阵 E ，则 $A =$ _____.

10. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ ， $r(A) = 2$ ，则数 $a =$ _____.

11. 设向量组 $\alpha_1 = (a, 2, 3)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, -1)^T$, $\alpha_3 = (2, -4, 5)^T$ ，若仅当常数 k_1, k_2, k_3 全为零时， $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ 才能成立，则数 a 的取值满足_____.

12. 设 3 阶矩阵 A 的各行元素之和为 0， $r(A) = 2$ ，则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的通解为_____.



13. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 相似, 则数 $a =$ _____.

14. 设 A 为 3 阶矩阵, α_i 为 3 维非零列向量, 且 $A\alpha_i = i\alpha_i$ ($i=1,2,3$), 则 $r(A) =$ _____.

15. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2$ 的正惯性指数为 _____.

三、计算题: 本大题共 7 小题, 每小题 9 分, 共 63 分。

16. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+\frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+\frac{1}{3} & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+\frac{1}{4} \end{vmatrix}$ 的值.

17. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $BA + B^T$.

18. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足关系式 $6A + X = XA$, 求 X .

19. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, -2)^T$, $\alpha_2 = (2, 5, -3, -3)^T$, $\alpha_3 = (-1, -1, 1, 2)^T$, $\alpha_4 = (6, 17, -9, -9)^T$, 求该向量组的秩和一个极大无关组, 并把其余向量用该极大无关组线性表出.

20. 求线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$ 的通解 (要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示).

21. 判定矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ 能否相似于对角矩阵, 说明理由.

22. 求正交变换 $x = Qy$, 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 化为标准形.

四、证明题：本题 7 分。



23. 设 λ_1, λ_2 是 n 阶矩阵 A 的两个不同的特征值, α_1, α_2 分别是 A 的属于 λ_1, λ_2 的特征向量, 证明 α_1, α_2 线性无关.



线性代数(经管类)202110(课程代码 04184)

一、单项选择题：本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分

1. A 2. B 3. D 4. C 5. A

二、填空题:本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分。

6. 0 7. $-m-n$ 8. 30 9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

10. -2 11. $a \neq 32$ 12. $k(1, 1, 1)^T$ 13. 3

14. 3 15. 3

三、计算题:本大题共 7 小题, 每小题 9 分, 共 63 分。

$$16. \begin{vmatrix} 1+1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+\frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+\frac{1}{3} & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+\frac{1}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 9 & 16 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{24} \begin{vmatrix} 2+4+9+16 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{31}{24}$$

$$17. BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA + B^T = \begin{pmatrix} -9 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 6 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

18. 由 $6A + X = XA$ 可得 $X(A - E) = 6A$

$$\text{由 } A - E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 得 } |A - E| = 6 \neq 0 \text{ 故 } A - E \text{ 可逆}$$

从而 $X = 6A(A - E)^{-1}$



$$(A-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 因此 } X = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$



$$19. \text{ 由 } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 5 & -1 & 17 \\ -1 & -3 & 1 & -9 \\ -2 & -3 & 2 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此向量组的秩为 3, 一个极大无关组是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\alpha_4 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 \quad (\text{答案不唯一})$$

20. 对非齐次线性方程组的增广矩阵作初等行变换:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

得同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = -x_3 + 4 \end{cases}$, 由此得到非齐次线性方程组的特解

$$\eta^* = (0, 4, 0)^T, \text{ 导出组的一个基础解系为 } \xi = (-3, -1, 1)^T$$

从而线性方程组的通解为 $x = k\xi + \eta^*$, 其中 k 是任意常数

21. 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & 4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 1)$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$

对于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 由于 $r(0E - A) = 2$,

所以 A 的属于 2 重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 的线性无关特征向量只有 1 个, 故 A 不能与对角矩阵相似

22. 解: 二次型矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 由题设知,

特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 5$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 时, 方程组 $(-E - A)x = 0$ 的基础解系为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

正交化、单位化得 $\eta_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\eta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

当 $\lambda_3 = 5$ 时, 方程组 $(5E - A)x = 0$ 的基础解系为

$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 单位化得 $\eta_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

令 $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, 则 Q 为正交矩阵,

作正交变换 $x = Qy$ 得标准形 $f = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$

四、证明题: 本题 7 分。

23. 证 设存在常数 k_1, k_2 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = 0 \quad (1)$$

用 A 左乘 (1) 的两边, 得

$$A(k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2) = k_1 A\alpha_1 + k_2 A\alpha_2 = 0$$

已知 $A\alpha_1 = \lambda_1 \alpha_1$, $A\alpha_2 = \lambda_2 \alpha_2$, 上式化为



$$k_1\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2=0 \quad (2)$$

由②- $\lambda_2 \times$ ①得 $k_1(\lambda_1-\lambda_2)\alpha_1=0$ ，又 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ， $\alpha_2 \neq 0$ ，则 $k_1=0$ ；

将 $k_1=0$ 代入①式得 $k_2\alpha_2=0$ ，又 $\alpha_2 \neq 0$ ，推出 $k_2=0$

所以 α_1, α_2 线性无关