绝密★启用前

2021年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工专)

(课程代码　00022)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分,第一部分为选择题,第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答,答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔,书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分　选择题

一、单项选择题:本大题共5小题,每小题2分,共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 下列函数中,周期为 π 的函数是

A. $y=\sin x$　　B. $y=\sin\frac{x}{2}$　　C. $y=\arctan 2x$　　D. $y=\tan(x+1)$

2. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=$

A. $-\infty$　　B. 0　　C. e^{-1}　　D. ∞

3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 的敛散情况是

A. 发散　　B. 收敛于0　　C. 收敛于e　　D. 收敛于1

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0,\\ x, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=$

A. $2\int_{-1}^{0}x\mathrm{d}x$　　B. $2\int_{0}^{1}x^2\mathrm{d}x$

C. $\int_{0}^{1}x^2\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}x\mathrm{d}x$　　D. $\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}x^2\mathrm{d}x$

5. 设 A 为三阶方阵,A 的转置矩阵记为 A',下面选项中正确的选项是

A. $|A'|=|A|^{-1}$　　B. $|A'|=|A|$

C. $|A'|\neq|A|$　　D. $|A'|=|-A|$

第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共 8 空，每空 4 分，共 32 分。

6. 已知 $f(\frac{1}{x})=(\frac{x+1}{x})^2$，则 $f(x)=$ ________.

7. 极限 $\lim\limits_{x\to16}\frac{x^2-256}{x+10}=$ ________.

8. 设 $f(x)$ 是可导函数，$y=e^{2x}+f^2(x)$，则 $\frac{dy}{dx}=$ ________.

9. 已知 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(0)-f(\Delta x)}{\Delta x}=1$，则 $f'(0)=$ ________.

10. $\int_{-2}^{2}(x^3+|x|)dx=$ ________.

11. 曲线 $y=x^2$ 及 $y^2=x$ 所围的平面图形的面积为 ________.

12. 行列式 $\begin{vmatrix}2&3&4\\3&2&1\\6&4&-2\end{vmatrix}=$ ________.

13. 已知 $\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}$，则矩阵 $X=$ ________.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 6 分，共 42 分。

14. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-x}+e^{x}-2}{x^2}$.

15. 设 $y=x^2+2^x+\ln5$，求 $y'|_{x=0}$.

16. 在曲线 $y=x\ln x+1$ 上求一点，使该点的切线与直线 $y=2x+3$ 平行.

17. 求不定积分 $\int\frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$.

18. 确定函数 $y=e^x-e^{-x}-1$ 的单调区间.

19. 计算定积分 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$.

20. 如果方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2-x_3=0,\\x_1+\lambda x_2-x_3=0,\\2x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$$

仅有零解，λ 应取何值？

四、综合题：本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分。

21. 设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$，试问当常数 a,b 满足什么关系时，$f(x)$ 一定没有极值，可能有一个极值，可能有两个极值？

22. 求由 $y=x^2$ 及 $y=1$ 所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

绝密★启用前

2021年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工专)试题答案及评分参考

(课程代码 00022)

一、单项选择题:本大题共5小题,每小题2分,共10分。

1. D　2. B　3. A　4. C　5. B

二、填空题:本大题共8空,每空4分,共32分。

6. $(1+x)^2$　7. 0　8. $2e^{2x}+2f(x)f'(x)$　9. -1

10. 4　11. $\frac{1}{3}$　12. 20　13. $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

三、计算题:本大题共7小题,每小题6分,共42分。

14. 解: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}+e^{x}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-e^{-x}+e^{x}}{2x}$ (2分)

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}$ (2分)

$=1.$ (2分)

15. 解: $y'=2x+2^x\ln2+0$

$=2x+2^x\ln2,$ (4分)

$y'|_{x=0}=2\times0+2^0\ln2=\ln2.$ (2分)

16. 解: $y'=\ln x+1$ (2分)

设所求点为(x_0,y_0),由导数的几何意义知,切线斜率$k=\ln x_0+1$,

依题意$\ln x_0+1=2$,解得$x_0=e$. (2分)

将$x_0=e$代入$y=x\ln x+1$,可得$y_0=e+1$,

故曲线上点$(e,e+1)$处的切线与直线$y=2x+3$平行. (2分)

17. 解: $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$ (3分)

$=-\dfrac{1}{2(1+x^2)}+C.$ (3分)

18. 解：函数 $y=e^x-e^{-x}-1$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 内的可导函数，并且

$$y'=e^x-e^{-x}(-1)=e^x+e^{-x},\qquad (2分)$$

由于 $\quad y'=e^x+e^{-x}>0,$ （2分）

因此函数 $y=e^x-e^{-x}-1$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加. （2分）

19. 解：$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx \xlongequal{令\sqrt{x}=t} \int_0^1 2te^t dt$

$$=2\int_0^1 te^t dt \qquad (3分)$$

$$=2\left(te^t\big|_0^1-\int_0^1 e^t dt\right)$$

$$=2\left(e-e^t\big|_0^1\right)=2. \qquad (3分)$$

20. 解：齐次线性方程组仅有零解的充分必要条件是系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 1 & \lambda & -1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}\neq 0. \qquad (3分)$$

而 $D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 1 & \lambda & -1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+2 & 0 & 0\\ 1 & \lambda & -1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}$

$$=(\lambda+2)(\lambda-1)$$

故 $\quad(\lambda+2)(\lambda-1)\neq 0$，即 $\lambda\neq -2,\lambda\neq 1$ 时，方程组仅有零解. （3分）

四、综合题：本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分。

21. 解：函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，并且

$$f'(x)=3x^2+2ax+b, \qquad (2分)$$

令 $\quad f'(x)=0,$

当 $\Delta=4a^2-12b<0$，即 $a^2-3b<0$ 时，方程 $f'(x)=0$ 没有根，函数 $f(x)$ 没有驻点；

当 $\Delta=4a^2-12b=0$，即 $a^2-3b=0$ 时，方程 $f'(x)=0$ 有一个根，函数 $f(x)$ 有一个驻点；

当 $\Delta=4a^2-12b>0$，即 $a^2-3b>0$ 时，方程 $f'(x)=0$ 有两个根，函数 $f(x)$ 有两个驻点； （2分）

因为可导函数的极值点一定是驻点， （2分）

所以当 $\quad a^2-3b<0$ 时，$f(x)$ 一定没有极值；当 $a^2-3b=0$ 时，$f(x)$ 可能有一个极值；当 $a^2-3b>0$ 时，$f(x)$ 可能有两个极值. （2分）

22. 解:所求体积

$$V = \pi\int_0^1 (\sqrt{y})^2 \mathrm{d}y \quad (4\text{ 分})$$

$$= \pi \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2}. \quad (4\text{ 分})$$