

2019 年 4 月高等教育自学考试全国统一命题考试

线性代数(经管类) 试卷

(课程代码 04184)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答, 答在试卷上无效
3. 涂写部分, 画图部分必须使用 2B 铅笔, 书写部分必须使用黑色字迹签字表

说明: 在本卷中, A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩。

第一部分 选择题

一、单项选择题: 本大题共 5 小题, 每小题 2 分, 共 10 分。

在每小题列出的备选项中只有一个是符合题目要求的, 请将其选出。

1. 行列式 $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & a_2-a_1 \\ b_1+b_2 & b_2-b_1 \end{vmatrix} = -2$, 则 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

2. 设 A 为 2 阶矩阵, 将 A 的第 1 行与第 2 行互换得到矩阵 B , 再将 B 的第 2 行加到第 1 行得到矩阵 C , 则满足 $PA=C$ 的可逆矩阵 $P=$

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. 设向量 $\beta = (2, 1, b)^T$ 可由向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 3, a)^T$ 线性表出, 则数 a, b 满足关系式

- A. $a-b=4$ B. $a-b=0$ C. $a+b=4$ D. $a+b=0$

4. 设齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 则数 $k=$

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

5. 设 3 阶实对称矩阵 A 的秩为 2, 则 A 的特征值 $\lambda = 0$ 的重数为

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

第二部分 非选择题

二、填空题: 本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分。

6. 设某 3 阶行列式第 2 行元素分别为 1, -2, 3, 对应的余子式为 3, 2, -2, 则该行行列式的值为



7. 已知行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, 则 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ a-1 & b+1 & c-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

8. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

9. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 - A = 2E$, 则 $A^{-1} =$

10. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T$, $\alpha_2 = (1, a, 1)^T$, $\alpha_3 = (a, 1, 1)^T$ 的秩为 2, 则数 $a =$

11. 与向量 $\alpha_1 = (2, -1)^T$ 正交的单位向量 $\alpha_2 =$

12. 设 4 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵经初等行变换化为

$$(A, b) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & 0 \end{array} \right)$$

若该线性方程组有惟一解, 则数 a 的取值应满足

13. 设 A 为 n 阶矩阵, 若非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解, 则 $|A| =$

14. 设 A 为 n 阶矩阵, 且满足 $|3A+2E|=0$, 则 A 必有一个特征值为

15. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 - (x_2 + x_3)^2$ 的矩阵 $A =$

三、计算题: 本大题共 7 小题, 每小题 9 分, 共 63 分

16. 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

17. 设向量 $\alpha = (2, 1, 3)^T$, $\beta = (-1, 1, 1)^T$, $A = \alpha\beta^T$, 求 A 和 A^5 .

18. 设矩阵 A, B 满足关系式 $X=XA+B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X

19. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ 的秩和列向量组的一个极大无关组, 并将其余列向量由该极大无关组线性表示

20. 设线性方程组



$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + (a+2)x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = b \end{cases}$$

确定数 a,b 为何值时, 方程组有无穷多解, 并求出其通解 (要求用其一个特解和导出组的基础解系表示)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

21. 设矩阵 判定 A 是否可对角化, 若可以, 求可逆矩阵 P 和对角矩阵 A, 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

22. 求正交换 $x=Qy$, 将二次型 $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$ 化为标准形

四、证明题: 本题 7 分

23. 已知向量 β 可由向量组 α_1, α_2 线性表出, 证明: 如果表示法惟一, 则 α_1, α_2 线性无关



2019 年 4 月高等教育自学考试全国统一命题考试
 线性代数（经管类）试题答案及评分参考
 （课程代码 04184）

一、单项选择题：本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分。

1. B 2. A 3. C 4. D 5. B

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6. -1

7. -1

8.
$$\begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + 2a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + 2a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

9. $\frac{1}{2}(A-E)$

10. -2

11. $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})^T$ 或 $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})^T$

12. $a \neq 2$

13. 0

14. $-\frac{2}{3}$

15.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16. 解 $D = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5 分

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$$
9 分

线性代数（经管类）试题答案及评分参考第 1 页（共 4 页）



17. 解 $A = \alpha\beta^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 3分

$A^5 = (\alpha\beta^T)^5 = \alpha(\beta^T\alpha)^4\beta^T = (\beta^T\alpha)^4\alpha\beta^T = (\beta^T\alpha)^4 A$ 6分

其中

$$\beta^T\alpha = (-1, 1, 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2,$$

从而 $A^5 = 2^4 \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 9分

18. 解 由 $X = XA + B$, 得到 $X(E - A) = B$

而 $|E - A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 故 $E - A$ 可逆

且 $(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 5分

从而 $X = B(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ 9分

19. 解 设

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, 由

$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 5分

可知 A 的秩为 2; α_1, α_2 为 A 的列向量组的一个极大无关组, 并且有

$\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_4 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2$ 9分

(答案不惟一)

线性代数(经管类)试题答案及评分参考第2页(共4页)



20. 解 由方程组的增广矩阵

$$\bar{A} = (A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & a+2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & b \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right)$$

可知当 $a=1, b=0$ 时, $r(A)=r(\bar{A})=2<3$, 方程组有无穷多解4 分

此时, 由同解方程组
$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 \end{cases}$$

得特解 $\eta^* = (1, -1, 0)^T$; 导出组的一个基础解系 $\xi = (-2, -1, 1)^T$,

从而方程组的通解为

$$\eta = \eta^* + k\xi = (1, -1, 0)^T + k(-2, -1, 1)^T \quad (\text{其中 } k \text{ 为任意常数}) \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

21. 解 由
$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-3) = 0$$

得到 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$ 2 分

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, 解方程组 $(-E - A)x = 0$, 得基础解系

$$\alpha_1 = (-1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T$$

对于 $\lambda_3 = 3$, 解方程组 $(3E - A)x = 0$, 得基础解系

$$\alpha_3 = (1, 0, 3)^T \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

由于 3 阶矩阵 A 有 3 个线性无关的特征向量, 故 A 可以对角化7 分

$$\text{令 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

.....9 分

则 P 可逆, 且 $P^{-1}AP = \Lambda$

22. 解 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)$$

.....4 分



当 $\lambda_1 = 1$ 时, 方程组 $(E - A)x = 0$ 的基础解系为 $\xi_1 = (0, -1, 1)^T$,

单位化得 $\eta_1 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

当 $\lambda_2 = 2$ 时, 方程组 $(2E - A)x = 0$ 的基础解系为 $\xi_2 = (1, 0, 0)^T$,

单位化得 $\eta_2 = (1, 0, 0)^T$.

当 $\lambda_3 = 5$ 时, 方程组 $(5E - A)x = 0$ 的基础解系为 $\xi_3 = (0, 1, 1)^T$,

单位化得 $\eta_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$7 分

令 $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 Q 为正交矩阵,

作正交变换 $x = Qy$, 得标准形

$$f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2 \quad \text{.....9 分}$$

四、证明题: 本题 7 分。

23. 证 已知向量 β 可由向量组 α_1, α_2 线性表出, 故存在常数 k_1, k_2 , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = \beta \quad (1) \quad \text{.....2 分}$$

假如 α_1, α_2 线性相关, 则存在不全为零的常数 c_1, c_2 , 使得

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0 \quad (2) \quad \text{.....4 分}$$

(1) - (2), 得到 $(k_1 - c_1)\alpha_1 + (k_2 - c_2)\alpha_2 = \beta$

由于 c_1, c_2 不全为零, 可推出 $k_1 - c_1 \neq k_1$ 或 $k_2 - c_2 \neq k_2$,

从而表示法不惟一, 与已知条件矛盾.

因此 α_1, α_2 线性无关.7 分



橙鹿学历宝
www.clxlb.com

橙鹿学历宝
www.clxlb.com

橙鹿学历宝
www.clxlb.com

