

全国 2019 年 10 月高等教育自学考试

高等数学（一）试题

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 下列函数为奇函数的是（ ）。

A. $|x|\sin^2 x$

B. $|x|\cos^2 x$

C. $x\sin x$

D. $x\cos x$

【正确答案】 D

【答案解析】 已知奇函数满足 $f(x) = -f(-x)$ ，因为 D 选项中令 $f(x) = x\cos x$ ，有 $f(-x) = -x\cos x$ ，满足奇函数条件，故选择 D。参见教材 P31。

【知识点】 函数的奇偶性。

2. 当 $x > 0, y > 0$ 时，下列等式成立的是（ ）。

A. $\ln(xy) = \ln x \ln y$

B. $\ln(x+y) = \ln x + \ln y$

C. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

D. $\ln \frac{x}{y} = \frac{\ln x}{\ln y}$

【正确答案】 C

【答案解析】 因为对数函数有 $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ 的性质，故选 C。参见教材 P38。

【知识点】 对数函数。

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 2}{2n^3 + n} =$ （ ）。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【正确答案】 B

【答案解析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 2}{2n^3 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n^2}{6n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24n}{12n} = 2$ 。参见教材 P96。

【知识点】 洛必达法则。



4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{2x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 $a = (\quad)$ 。

- A. 0
- B. $\frac{1}{2}$
- C. 1
- D. 2

【正确答案】 B

【答案解析】 因为函数在 $x=0$ 处连续, 则有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$, 带入可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } a = \frac{1}{2}, \text{ 故选 B。参见教材 P63。}$$

【知 识 点】 函数的连续性。

5. 曲线 $y = x^2$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 $(\quad)$ 。

- A. $y = 3x - 2$
- B. $y = 3x - 4$
- C. $y = 2x - 2$
- D. $y = 2x - 4$

【正确答案】 A

【答案解析】 因为函数在一点处的导数值即为函数在该点处的切线斜率。所以, 先求得 $f'(x) = 4x - 1$, 将 $x = 1$ 带入导数可得斜率 $k = f'(1) = 3$ 。然后, 设直线方程为, $y - y_0 = k(x - x_0)$, 将切线斜率 $k = 3$ 和点 $(1, 1)$ 带入可得 $y = 3x - 2$ 。参见教材 P73。

【知 识 点】 导数的几何意义。

6. 设需求函数为 $Q = 35 - P^2$, 其中 P 和 Q 分别是价格与需求量, 则 $P = 5$ 时的需求价格弹性为 $(\quad)$ 。

- A. -9
- B. -7
- C. -5
- D. -3

【正确答案】 C



【答案解析】 由定义可知 $\lim_{Vp \rightarrow 0} \frac{VQ}{Q_0} \bigg/ \frac{Vp}{p_0} = \frac{p_0}{f(p_0)} f'(p_0)$ 称为该商品在 p_0 处的需求弹性。所以，将 $p_0 = 5$ 带入可得 $\frac{5}{f(5)} f'(5) = \frac{5}{35-5^2} (-29) = \frac{5}{10} (-10) = -5$ ，故选 C。参见教材 P114。

【知识点】 导数在经济分析中的应用。

7. 函数 $f(x) = 3^x - 3^{-x}$ ()。

- A. $(-\infty, +\infty)$ 单调增加
- B. $(-\infty, +\infty)$ 有增有减
- C. $(0, +\infty)$ 单调减少
- D. $(-\infty, 0)$ 内单调减少

【正确答案】 A

【答案解析】 函数求导得 $f'(x) = \ln 3 \cdot 3^x - \frac{-\ln 3 \cdot 3^{-x}}{3^{2x}} = \frac{\ln 3 (3^{2x} + 1)}{3^{2x}} > 0$ ，又因为原函数定义域没有限制，故在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加。参见教材 P100。

【知识点】 求导法判断单调性。

8. 曲线 $y = x^3 - 6x^2 + 10x - 1$ 的拐点为 ()。

- A. (2,3)
- B. (3, 2)
- C. (1,2)
- D. (2,1)

【正确答案】 A

【答案解析】 由拐点定义可知，需先求二阶导。则 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 10$ ，二阶导为 $f''(x) = 6x - 12$ 。令 $f''(x) = 0$ 解得 $x = 2$ 带入原函数得 $f(2) = 3$ ，故拐点 (2,3)。参见教材 P108。

【知识点】 曲线的拐点。

9. 不定积分 $\int \frac{x}{x^2+1} dx =$ ()。

- A. $\ln(x^2+1) + C$
- B. $\arctan(x^2+1) + C$
- C. $\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$



D. $\frac{1}{2}\arctan(x^2+1)+C$

【正确答案】 C

【答案解析】 $\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx^2 = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$ 。参见教材 P120。

【知识点】 不定积分的计算。

10. 设函数 $z = x^2 + xy + 2y^2$ ，则全微分 $dz|_{(2,1)} = ()$ 。

A. $3dx + 6dy$

B. $6dx + 3dy$

C. $6dx + 5dy$

D. $5dx + 6dy$

【正确答案】 D

【答案解析】 因为 $f'_x(x_0, y_0) = 2x + y$ ， $f'_y(x_0, y_0) = x + 4y$ 。根据全微分定义可知 $dz|_{(2,1)} = f'_x(2,1)dx + f'_y(2,1)dy = 5dx + 6dy$ 。参见教材 P190。

【知识点】 全微分的定义。

二、简单计算题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11. 求抛物线 $y = x^2 - x$ 与直线 $y = x + 3$ 的交点。

【正确答案】

解方程组
$$\begin{cases} y = x^2 - x \\ y = x + 3 \end{cases}$$

得曲线 $y = x^2 - x$ 与直线 $y = x + 3$ 的交点是 $(3, 6)$ 和 $(-1, 2)$ 。

【答案解析】 通过函数性质可知，求两个函数交点是将两个函数进行联立，然后解方程组即为所求。参见教材 P169 例题中有求交点步骤。

【知识点】 函数的图像和性质

12. 求函数 $f(x) = \frac{x-3}{2(x-1)^2}$ 的间断点。

【正确答案】



由题可知，函数在 $x=1$ 处没有定义，故讨论其间断点类型。

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-3}{2(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-3}{2(x-1)^2} = -\infty$$

所以， $x=1$ 为函数的第二类间断点。

【答案解析】 求间断点，我们首先要做的是找到不在定义域内的点，然后再判断其间断点类型。参见教材 P64。

【知识点】 间断点的类型。

13. 设函数 $y = e^{2x} \arcsin x$ ，求导数 $\frac{dy}{dx}$ 。

【正确答案】

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (e^{2x})' \arcsin x + e^{2x} (\arcsin x)' \\ &= 2e^{2x} \arcsin x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= e^{2x} \left(2 \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \end{aligned}$$

【答案解析】 运用了导数的四则运算法则以及复合函数的链式求导法则。参见教材 P78。

【知识点】 导数的四则运算。

14. 求曲线 $y = \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + \ln 2}$ 的水平渐近线。

【正确答案】 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + \ln 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 1}{6x} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$



则根据定义有, $y = \frac{2}{3}$ 为 $x \rightarrow \infty$ 的水平渐近线。

【答案解析】 求渐近线有固定方法, 所以要熟记渐近线定义。参见教材 P110。

【知识点】 曲线的渐近线。

15. 计算定积分 $I = \int_{-\pi}^{\pi} x^{100} \sin x dx$ 。

【正确答案】

$$\text{令 } f(x) = x^{100} \sin x$$

$$\text{因为 } f(-x) = -x^{100} \sin x = -f(x)$$

所以函数为奇函数且为连续函数

$$\text{则由性质可知 } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$\text{所以, } I = \int_{-\pi}^{\pi} x^{100} \sin x dx = 0$$

【答案解析】 该题因为被积函数有明显的特征性, 所以考虑使用性质解题。参见教材 P160。

【知识点】 定积分的基本性质。

三、计算题 (本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

16. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{2}{x}}$ 。

【正确答案】

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1-x)^{-\frac{1}{x}} \right]^{-2} = e^{-2}$$

【答案解析】 考查两个重要极限。参见教材 P56。

【知识点】 两个重要极限。



17. 设函数 $y = xe^{2x}$ ，求二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

【正确答案】

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} + 2xe^{2x} = e^{2x}(1 + 2x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^{2x}(1 + 2x) + 2e^{2x} = 4e^{2x}(1 + x)$$

【答案解析】 求二阶导数需要先将一阶导数求出，再根据一阶导数求出二阶导数。参见教材 P86。

【知识点】 高阶导数。

18. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$ 。

【正确答案】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x + e^{-x} = 2$$

【答案解析】 运用了等价无穷小替换以及洛必达法则。参见教材 P60、P96。

【知识点】 洛必达法则。

19. 设函数 $F(x) = x \int_0^x \sin t dt$ ，求二阶导数 $F''(x)$ 。

【正确答案】

$$F'(x) = \int_0^x \sin t dt + x \sin x$$

$$F''(x) = \sin x + \sin x + x \cos x = 2 \sin x + x \cos x$$

【答案解析】 本题难点在于变上限积分的求导。参见教材 P152。

【知识点】 变上限积分及其导数公式。



20. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^{3x}$ 的通解。

【正确答案】

由题可知, $P(x) = -1$, $Q(x) = e^{3x}$

带入公式得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int -1 dx} \left[\int e^{3x} e^{\int -1 dx} dx + C \right] \\ &= e^x \left[\int e^{2x} dx + C \right] \\ &= e^x \frac{1}{2} e^{2x} + C \\ &= \frac{1}{2} e^{3x} + C \end{aligned}$$

求出通解为 $y = \frac{1}{2} e^{3x} + C$

【答案解析】 观察题干可知该题微分方程类型属于一阶线性微分方程, 故带入一阶线性微分方程通解公式 $y = e^{-\int P(x) dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right]$ 即可。参见教材 P143。

【知识点】 一阶线性微分方程。

四、综合题 (本大题共 4 小题, 共 25 分)

21. (本小题 6 分)

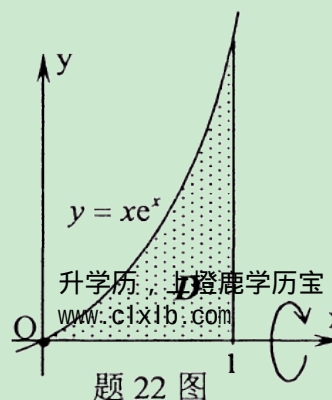
某产品产量为 Q 时的边际成本为 $C'(Q) = 2Q + 2$ (万元/吨), 固定成本 10 万元。

(1) 求总成本函数 $C(Q)$ 。

(2) 若售价 $P = 20 - Q$ (万元/吨), 问产销平衡时, 生产多少产品可获最大利润? 最大利润是多少?

【正确答案】

(1) 解:



题 22 图

$$C(Q) = \int C'(Q)dQ = \int 2Q + 2dQ = Q^2 + 2Q + C$$

因为固定成本为 10 万元

所以总成本函数为 $C(Q) = Q^2 + 2Q + 10$

(2) 解:

由售价可知, 总收益函数为 $R(Q) = Q(20 - Q) = 20Q - Q^2$

所以, 总利润函数为

$$L(Q) = R(Q) - C(Q) = 20Q - Q^2 - Q^2 - 2Q - 10 = -2Q^2 + 18Q - 10$$

由一元二次函数性质可知 $Q = 4.5$ 为函数最大值点, 并且 $L(4.5) = 30.5$

所以可知生产 4.5 吨时可获最大利润, 最大利润为 30.5 万元。

【答案解析】(1) 总成本函数求导即为边际成本, 故我们已知边际成本后求积分即可得到总成本函数。又因为总成本是固定成本加可变成本。参见教材 P44、P112。(2) 总利润函数为总收益函数减去总成本函数。然后对总利润函数求最大值即为最大利润, 参见教材 P45。

【知识点】由边际函数求总函数

22. (本小题 6 分)

设平面图形 D 是由曲线 $y = xe^x$ 与直线 $x = 1$ 及 x 轴所围成, 如图所示。

(1) 求 D 的面积 A 。

(2) 求 D 绕 x 轴一周的旋转体体积 V_x 。

【正确答案】

(1) 解:

由图可知

$$A = \int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x d(e^x) = \left(xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right) = xe^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = 1$$

D 的面积为 1。

(2) 解:

由图可知



$$\begin{aligned}
 V_x &= \pi \int_0^1 (xe^x)^2 dx \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 x^2 d(e^{2x}) \\
 &= \frac{\pi}{2} \left[x^2 e^{2x} \Big|_0^1 - \int_0^1 2xe^{2x} dx \right] \\
 &= \frac{\pi}{2} e^2 - \frac{\pi}{2} \int_0^1 x d(e^{2x}) \\
 &= \frac{\pi}{2} e^2 - \frac{\pi}{2} \left[x e^{2x} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{2x} dx \right] \\
 &= \frac{\pi}{2} e^2 - \frac{\pi}{2} e^2 + \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{\pi}{4} (e^2 - 1)
 \end{aligned}$$

D 绕 x 轴一周的旋转体体积为 $\frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$

【答案解析】 (1) 了解定积分的几何意义即可求解, 参见教材 P149。(2) 了解定积分求旋转体的体积即可求解, 参见教材 P170。

【知识点】 定积分的几何意义。

23. (本小题 6 分)

求函数 $z = x^2 + 5y^2 - 3xy$ 的极值。

【正确答案】

解:

因为 $f(x, y) = x^2 + 5y^2 - 3xy$

所以 $f'_x(x, y) = 2x - 3y$, $f'_y(x, y) = 10y - 3x$

令 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$, 解得驻点 $(0, 0)$

$A = f''_{xx}(0, 0) = 2$, $B = f''_{xy}(0, 0) = -3$, $C = f''_{yy}(0, 0) = 10$

因为 $B^2 - AC = 9 - 20 = -11 < 0$ 且 $A > 0$

所以 $f(0, 0) = 0$ 是函数 z 的最小值

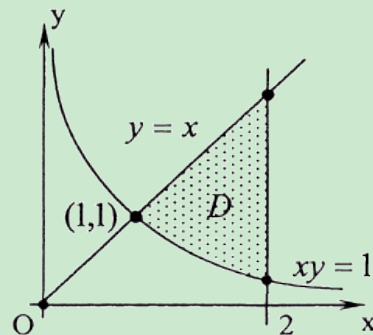


【答案解析】 本题考查二元函数求极值的步骤。参见教材 P200。

【知识点】 二元函数的极值。

24. (本小题 7 分)

计算二重积分 $I = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, 其中 D 是由直线 $x=2, y=x$ 和双曲线 $xy=1$ 围成的平面区域, 如图所示。



题 24 图

【正确答案】

解:

由题可知区域 D 为

$$D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{x} \leq y \leq x \end{cases}$$

从而有

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy \\ &= \int_1^2 x^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{y^2} dy \\ &= \int_1^2 x^2 dx \left(-\frac{1}{y} \right) \bigg|_{\frac{1}{x}}^x \\ &= \int_1^2 x^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \int_1^2 (x^3 - x) dx \\ &= \left(\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \right) \bigg|_1^2 \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

【答案解析】 本题考查二重积分的计算, 选择累次积分求解。参见教材 P208。



【知 识 点】 二重积分的计算。

橙鹿学历宝
www.clxlb.com

橙鹿学历宝
www.clxlb.com

橙鹿学历宝
www.clxlb.com

升学历，上橙鹿学历宝
www.clxlb.com

