全国 2019 年 4 月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)试题、详细答案及考点分析

（课程代码：00023）

（不允许使用计算器）

注意事项：

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用 2B 铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。在每小题列出的四个备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 在空间间直角坐标系中，点 $(2,-1,-6)$ 关于原点的对称点的坐标是

A．$(-2,-1,-6)$　　B．$(-2,1,6)$

C．$(-2,-1,6)$　　D．$(-2,1,-6)$

解：使用空间间直角坐标系中对称点的关系。若点 $P(x,y,z)$ 关于原点对称，则 x，y，z 变为其相反数，则对称点为 $P_1(-x,-y,-z)$，所以点 $(2,-1,-6)$ 关于原点的对称点的坐标是 $(-2,1,6)$，选 B.

考核知识点：空间直角坐标系（识记）;

考核要求：知道空间直角坐标系的定义及相关的概念.

2. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}$

A．等于 0　　B．等于 1

C．等于 3　　D．不存在

解：使用第一重要极限进行求解。由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，故

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{y}=\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot x=1\times 3=3.$$

答案整理：郭慧敏 广州大学松田学院

因此，选 C.

考核知识点： 二元函数的极限与连续（识记）；

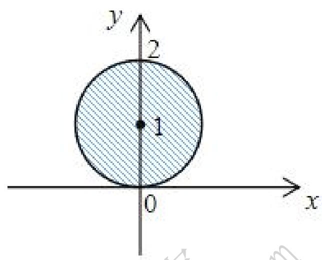
考核要求： 了解二重极限的概念.

3. 设积分区域 $D: x^2+(y-1)^2 \le 1$，二重积分 $\iint\limits_D f(x^2+y^2)\,d\sigma$ 化为极坐标下的二次积分为

A. $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r^2)\,dr$　　B. $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r^2)\,rdr$

C. $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2)\,dr$　　D. $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2)\,rdr$

解：根据极坐标下二重积分的计算方法进行求解。积分区域 $D: x^2+(y-1)^2 \le 1$ 的边界是圆心为 $(0,1)$，半径为 1 的圆，如下图所示



因此，令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，在极坐标下，积分区域 $D: x^2+(y-1)^2 \le 1$ 的边界变为：

$$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta-1)^2=1 \Rightarrow r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta-2r\sin\theta+1=1$$
$$\Rightarrow r^2=2r\sin\theta \Rightarrow r=2\sin\theta$$

从而二重积分 $\iint\limits_D f(x^2+y^2)\,d\sigma$ 变为

$$\iint\limits_D f(x^2+y^2)\,d\sigma = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2)\,rdr,$$

所以选 D.

考核知识点： 二重积分的计算（综合应用）；

考核要求： 熟练掌握计算二重积分的极坐标变换法.

4. 以 $y=\cos 4x$ 为特解的微分方程是

A. $y''+16y=0$　　B. $y''-16y=0$

C. $y''+16y'=0$　　D. $y''-16y'=0$

解：使用代入法。由于 $y=\cos 4x$ 是微分方程的特解，因此代入微分方程中必使等号成立。

因此将 $y=\cos 4x$ 代入 A，B，C，D 选项有

A：$y''+16y=-16\cos 4x+16\cos 4x=0$

B：$y''-16y=-16\cos 4x-16\cos 4x=-32\cos 4x\neq 0$

C：$y''+16y'=-16\cos 4x-16\sin 4x\neq 0$

D：$y''-16y'=-16\cos 4x+16\sin 4x\neq 0$

故选 A.

考核知识点：二阶线性微分方程解的结构（领会）；

考核要求：知道二阶线性齐次微分方程解的性质及通解结构.

5. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x-2)^n$ 的收敛域是

A. $(-2,2)$　　B. $[-2,2]$

C. $(0,4)$　　D. $[0,4]$

解：使用幂级数收敛半径进行计算。令 $t=x-2$，则幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}t^n$，其系数为

$$a_n=\frac{1}{2^n}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}}$$

故

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}}\right|=\frac{1}{2}$$

所以 $R=\frac{1}{\rho}=2$，此时幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}t^n$ 半径为 2，收敛域为 $(-2,2)$，从而原幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x-2)^n$ 半径为 2，收敛域 $(0,4)$.当 $x=0$，幂级数变为交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$，显然发散；当 $x=4$，幂级数变 $\sum_{n=1}^{\infty}1$，显然也是发散的，故收敛半径为 $(0,4)$，所以选 C.

考核知识点：幂级数的收敛性及和函数的性质（简单应用）；

考核要求：能熟练求出幂级数的收敛半径和收敛区间.

第二部分 非选择题

二、填空题：本大题共 5 空，每空 2 分，共 10 分。

6. 已知向量 $\alpha=\{2,a,-3\}$，$\beta=\{1,-1,-1\}$，且 $\alpha\cdot\beta=0$，则常数 $a=$______________.

解：使用数量积的方法进行计算。由于

$$\alpha\cdot\beta=\{2,a,-3\}\cdot\{1,-1,-1\}=2-a+3=0$$

故 $a=5$.

考核知识点： 向量的数量积（领会）；

考核要求： 熟练掌握数量积的坐标表示法及运算律.

7. 已知函数 $z=x^2y$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$______________.

解：使用偏导数乘法法则进行计算。由于 $z=x^2y$ 为连续函数，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y.$$

考核知识点： 高阶偏导数（简单应用）；

考核要求： 掌握二阶偏导数的求法.

8. 二次积分 $\int_0^1 dx\int_{-1}^1 xy^2\ dy$ 的值为______________.

解：使用二重积分方法进行计算。

$$\int_0^1 dx\int_{-1}^1 xy^2\ dy=\int_0^1\left(\frac{1}{3}xy^3\Big|_{-1}^1\right)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x\right)dx=\int_0^1\frac{2}{3}xdx=\frac{1}{3}x^2\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

考核知识点： 二重积分的计算（综合应用）；

考核要求： 熟练掌握在直角坐标系下二重积分的计算.

9. 微分方程 $ydx+xdy=0$ 的通解是______________.

解：使用分离变量法求解一阶微分方程。由于

$$ydx+xdy=0\Rightarrow xdy=-ydx\Rightarrow\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$$

因此对上式左右两端同时积分，可得

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln|y|=-\ln|x|+\ln|C|\Rightarrow\ln|y|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|\Rightarrow xy=C.$$

考核知识点： 三类一阶微分方程（简单应用）；

考核要求：会求可分离变量的微分方程、齐次方程、一阶线性微分方程这三种类型方程的通解和特解.

10. 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$ 的和 $s=$______________.

解：使用等比级数求和公式进行计算。由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)\cdot(-1)^n}{3^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=-\frac{-\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

所以 $s=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)=\frac{1}{4}$.

考核知识点：数项级数的基本概念（识记）；

考核要求：掌握等比级数的敛散性并会求和.

三、计算题：本大题共 12 **小题，每小题** 5 **分，共** 60 **分。**

11. 已知平面 π 经过点 $P_0(-1,1,2)$，并且与平面 $2x-3y+6z-3=0$ 平行，求平面 π 的方程.

解：使用两个平面平行的充要条件进行计算。设平面 π 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，由于平面 π 与平面 $2x-3y+6z-3=0$ 平行，故满足

$$\frac{A}{2}=\frac{B}{-3}=\frac{C}{6}=t\Rightarrow\begin{cases}A=2t\\B=-3t\\C=6t\end{cases}$$

又因为平面 π 经过点 $P_0(-1,1,2)$，代入方程可得

$$-A+B+2C+D=0\Rightarrow D=A-B-2C\Rightarrow D=2t-(-3t)-2\cdot6t=-7t$$

因此，平面 π 方程可变为

$$Ax+By+Cz+D=0\Rightarrow 2tx-3ty+6tz-7t=0\Rightarrow 2x-3y+6z-7=0.$$

考核知识点：平面方程（简单应用）；

考核要求：知道平面的一般式与截距式方程；会判断两个平面相互垂直和平行.

12. 已知函数 $u=f\left(x\ln y,y^2\ln x\right)$，其中 f 为可微函数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解：使用复合函数的偏导数进行计算。令 $s=x\ln y$，$t=y^2\ln x$，且 f 为可微函数，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=f_s'\cdot\ln y+f_t'\cdot\frac{y^2}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=f_s'\cdot\frac{x}{y}+f_t'\cdot 2y\ln x.$$

考核知识点：复合函数求导法则（简单应用）；

考核要求：知道复合函数求偏导数的链式法则；对于抽象函数，熟练掌握以下三种类型的复合函数一阶偏导数的求法：

（1） $w=f(u,v),u=u(x),v=(x)$；

（2） $w=f(u),u=u(x,y)$；

（3） $w=f(u,v),u=u(x,y),v=v(x,y)$.

13. 求曲线 $x=t+\sin t,y=t+\cos t,z=2t+3$，在对应于 $t=0$ 的点处的切线方程.

解：使用空间曲线的切线方程进行求解。因为 $x=t+\sin t,y=t+\cos t,z=2t+3$，故

$$x(0)=0,y(0)=1,z(0)=3$$

又因为 $x'=1+\cos t,y'=1-\sin t,z'=2$，故当 $t=0$，有

$$x'(0)=2,y'(0)=1,z'(0)=2$$

因此 $t=0$ 的点处的切线方程为

$$\frac{x-x(0)}{x'(0)}=\frac{y-y(0)}{y'(0)}=\frac{z-z(0)}{z'(0)}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{2}.$$

考核知识点：空间曲线的切线和法平面、曲面的切平面和法线（简单应用）；

考核要求：根据曲线的参数方程，会求曲线的切线方程和法平面方程.

14. 问在空间的哪些点上，函数 $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的梯度平行于 x 轴.

解：使用梯度公式进行计算

$$grad\ f(x_0,y_0,z_0)=f_x'(x_0,y_0,z_0)\vec{i}+f_y'(x_0,y_0,z_0)\vec{j}+f_z'(x_0,y_0,z_0)\vec{k}.$$

设空间上的点 (x,y,z)，则函数 u 的梯度为

$$grad\ u(x,y,z)=f_x'(x,y,z)\vec{i}+f_y'(x,y,z)\vec{j}+f_z'(x,y,z)\vec{k}$$
$$=(3x^2-3yz)\vec{i}+(3y^2-3xz)\vec{j}+(3z^2-3xy)\vec{k}$$
$$=\{3x^2-3yz,\ 3y^2-3xz,\ 3z^2-3x_0y\}$$

此时梯度平行于 x 轴，即：梯度与 x 轴的单位坐标对应成比例，从而

$$\begin{cases}3y-3xz=0\\3z-3xy=0\end{cases}.$$

考核知识点：方向导数和梯度（领会）；

考核要求：会求方向导数和梯度.

15. 计算二重积分 $\iint\limits_D(1+y)\ d\sigma$，其中积分区域 $D:x^2+y^2\le 1$.

解：使用极坐标下二重积分公式进行计算。由于积分区域 D 为圆域，故令

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}，其中 0\le r\le 1\ ,0\le\theta\le 2\pi$$

因此

$$\iint\limits_D(1+y)\ d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1+r\sin\theta)\cdot rdr=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r+r^2\sin\theta dr$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{3}\sin\theta\right)\Big|_0^1 d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sin\theta\right)d\theta=\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{3}\cos\theta\right)\Big|_0^{2\pi}$$
$$=\left(\pi-\frac{1}{3}\cos 2\pi\right)-\left(0-\frac{1}{3}\cos 0\right)=\pi.$$

考核知识点：二重积分的计算（综合应用）；

考核要求：熟练掌握计算二重积分的极坐标变换法.

16. 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)\ dv$，其中积分区域 $\Omega:x^2+y^2+z^2\le 3$.

解：使用球面坐标下三重积分的计算方法进行求解。由于积分区域 $\Omega:x^2+y^2+z^2\le 3$，故设

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi\\y=r\sin\theta\sin\varphi\\z=r\cos\varphi\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases}0 \le r \le \sqrt{3} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi\end{cases}$$

因此

$$\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dv=\iiint_{\Omega}\left(r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+r^2\cos^2\varphi\right)\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}r^4dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi=\frac{r^5}{5}\Big|_0^{\sqrt{3}}\cdot 2\pi\cdot(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}=\frac{36\sqrt{3}}{5}.$$

考核知识点：三重积分的计算（简单应用）；

考核要求：掌握计算三重积分的柱面坐标、球面坐标变换法.

17. 计算对弧长的曲线积分 $\int_C y^2 ds$，其中 C 是曲线 $x=\sqrt{1-y^2}$.

解：使用弧长的曲线积分公式进行运算。由于 C 是曲线 $x=\sqrt{1-y^2}$ ，为右半圆，则令

$$\begin{cases}x=\cos\theta \\ y=\sin\theta\end{cases}，其中 0\le\theta\le\pi$$

故

$$\int_C y^2ds=\int_0^{\pi}\sin^2\theta\sqrt{\left[(\cos\theta)'\right]^2+\left[(\sin\theta)'\right]^2}d\theta=\int_0^{\pi}\sin^2\theta\sqrt{[-\sin\theta]^2+[\cos\theta]^2}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\sin^2\theta\ d\theta=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2\theta\ d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}1\ d\theta$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2\theta\ d2\theta+\frac{1}{2}\theta\Big|_0^{\pi}$$

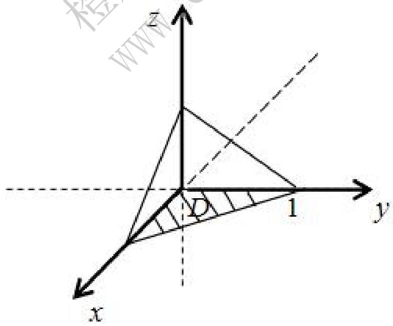
$$=-\frac{1}{4}\sin 2\theta\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\pi=\frac{1}{2}\pi.$$

考核知识点：两类曲线积分的计算（简单应用）；

考核要求：掌握对弧长的曲线积分的计算.

18. 计算对面积的曲面积分 $\iint_{\Sigma}\left(1+x+\frac{1}{2}y+z\right)dS$，其中 Σ 是平面 $2x+y+2z-1=0$ 在第一卦限中的部分。

解：使用对面积的曲面积分公式进行计算。由于 Σ 在 xOy 平面上投影 D 为 xOy 平面上由 x 轴，y 轴与联结 $\left(\frac{1}{2},0,0\right)$，$(0,1,0)$ 两点的直线所围的三角形区域，如图所示



又因为曲面Σ的方程为 $2x+y+2z-1=0\Rightarrow z=-x-\frac{y}{2}+\frac{1}{2}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-1,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2}$，从

而

$$1+x+\frac{1}{2}y+z=1+x+\frac{1}{2}y+\left(-x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

而

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}dxdy=\sqrt{\frac{9}{4}}dxdy=\frac{3}{2}dxdy$$

故

$$\iint_{\Sigma}\left(1+x+\frac{1}{2}y+z\right)dS=\iint_{D}\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}dxdy=\iint_{D}\frac{9}{4}dxdy=\frac{9}{4}\iint_{D}1\ dxdy=\frac{9}{4}|D|=\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{16}.$$

其中 $|D|$ 表示区域 D 的面积.

考核知识点：两类曲线积分的计算（简单应用）；

考核要求：掌握对坐标的曲线积分的计算.

19. 求微分方程 $x\frac{dy}{dx}+y=xe^x$ 的通解.

解：使用一阶非齐次线性微分方程通解公式进行计算。由于 $x\frac{dy}{dx}+y=xe^x$ 可变为

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=e^x$$

令 $P(x)=\frac{1}{x},\ Q(x)=e^x$，则代入一阶非齐次线性微分方程公式，可得

$$y=\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx+C\right]e^{-\int P(x)\,dx}=\left[\int e^xe^{\int\frac{1}{x}\,dx}dx+C\right]e^{-\int\frac{1}{x}\,dx}=\left(\int e^xxdx+C\right)\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\left(\int xde^x+C\right)=\frac{1}{x}\left(xe^x-\int e^xdx+C\right)=\frac{1}{x}\left(xe^x-e^x+C\right).$$

考核知识点：三类一阶微分方程（简单应用）；

考核要求：会求可分离变量的微分方程、齐次方程、一阶线性微分方程这三种类型方程的通解和特解.

20. 求微分方程 $y''+y'-12y=0$ 的通解.

解：使用二阶常系数齐次线性微分方程的解法进行计算。所给方程的特征方程为

$$r^2+r-12=0\Rightarrow(r-3)(r+4)=0$$

求得特征根为：$r_1=3,r_2=-4$，故原方程的通解为 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-4x}$.

考核知识点：二阶常系数线性齐次微分方程（简单应用）；

考核要求：会求二阶常系数线性齐次微分方程的特征方程和特征根；根据特征根的不同情况，能熟练写出通解形式.

21. 判断无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{8n}{5}$ 是否收敛，如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

解：使用无穷级数判断法进行求解。由于原级数的绝对值级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^3}\sin\frac{8n}{5}\right|$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^3}\sin\frac{8n}{5}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 为 p-级数（$p=3>1$），显然收敛，因此根据无穷级数的比较判别法可知，原级数是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{8n}{5}$ 收敛且绝对收敛.

考核知识点：一般项级数的审敛准则（简单应用）；

考核要求：会判断一般项级数的绝对收敛性.

22. 已知周期为 2π 的周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1\ ,-\pi\le x<0\\ 0,\ 0\le x<\pi\end{cases}$$

$S(x)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶级数 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 的和函数，求 $S(3\pi)$.

解：使用傅里叶级数收敛定理（狄里克雷收敛准则）进行计算。容易看出 $f(x)$ 满足收敛定理的条件，且它在 $x\ne(2k+1)\pi(k\in Z)$ 时处处连续，而 $x=(2k+1)\pi(k\in Z)$ 为 $f(x)$ 第一类

间断点，因此 $x=3\pi$ 是函数 $f(x)$ 的间断点，且 $f(x)$ 的周期为 2π，因此有 $S(3\pi)=S(\pi)$。

故其傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于

$$\frac{1}{2}\left[f(-\pi+0)+f(\pi-0)\right]=\frac{1}{2}\left[(-\pi)^2+1+0\right]=\frac{\pi^2+1}{2}$$

因此

$$S(3\pi)=\frac{\pi^2+1}{2}.$$

考核知识点：傅里叶级数（简单应用）；

考核要求：了解傅里叶级数的狄里克雷收敛准则；会求 $[-\pi,\pi)$ 上以 2π 为周期的函数的傅里叶级数展开式.

四、综合题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

23. 用钢板造一个表面积为 $27m^2$ 的长方体容器，应如何选择容器尺寸才可使容器的容积最大？并求最大容积.

解：设长方体容器的长、宽、高分别为 x，y，z，则长方体容器的容积为 $V=xyz$，而此容器的表面积为 $27m^2$，因此有

$$2(xy+xz+yz)=27\Rightarrow xy+xz+yz=\frac{27}{2}$$

故此问题变为条件极值问题，从而构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=xyz+\lambda\left(xy+xz+yz-\frac{27}{2}\right)$$

对上述函数求 x，y，z 偏导数，可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=yz+\lambda(y+z)=0\\[2mm]\dfrac{\partial L}{\partial y}=xz+\lambda(x+z)=0\\[2mm]\dfrac{\partial L}{\partial z}=xy+\lambda(x+y)=0\\[2mm]xy+xz+yz-\dfrac{27}{2}=0\end{cases}$$

由于 $xyz=-\lambda(xy+xz)=-\lambda(xy+yz)=-\lambda(xz+yz)$，因此当 $\lambda\neq0$ 时，有 $x=y=z$，代

入最后一个方程可得

$$x = y = z = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{3}$$

故$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$是唯一驻点，所以当长、宽、高均为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$时，容器容积最大，此时容积为$\frac{27\sqrt{2}}{4}m^3$.

考核知识点：二元函数的极值（综合应用）；

考核要求：了解条件极值的概念；会用拉格朗日乘数法求多元函数在一个约束条件下的极值.

24. 验证$xy^2dx + x^2ydy$在整个Oxy平面内是某个二元函数$u(x, y)$的全微分，并求这样的一个$u(x, y)$.

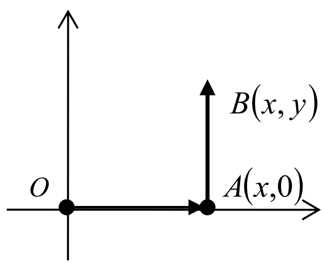
证明：令$P(x, y) = xy^2$，$Q(x, y) = x^2y$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

在整个Oxy平面内处处成立。显然$xy^2dx + x^2ydy$是某个二元函数$u(x, y)$的全微分，且可取

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} xy^2dx + x^2ydy$$

选择积分路径如图所示



则有

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} xy^2dx + x^2ydy = \int_{OA} xy^2dx + x^2ydy + \int_{AB} xy^2dx + x^2ydy$$

$$= 0 + \int_0^y x^2ydy$$

$$= \frac{x^2y^2}{2}\Big|_0^y = \frac{x^2y^2}{2}.$$

考核知识点：平面曲线积分与路径无关的条件（领会）；

考核要求：了解平面曲线积分与路径无关的条件；会用曲线积分与路径无关的性质计算曲线积分.

25. 将函数 $f(x)=e^{2x}$ 展开成 x 的幂函数.

解：使用函数展开成幂函数的间接法进行计算。由于 e^x 幂级数展开式为

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,x\in R$$

令 $t=2x$，则有

$$e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!},t\in R$$

因此

$$f(x)=e^{2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!},x\in R.$$

考核知识点：函数的泰勒级数展开式（综合应用）；

考核要求：熟记函数 $\frac{1}{1-x},e^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x)$ 的麦克劳林级数展开式；会用间接法将比较简单的函数展开成幂级数.