

# 2019 年中国科学技术大学自主招生试题

2019 年 6 月 21 日

1.  $3^{2016}$  除以 100 的余数为\_\_\_\_\_.

解 21.

由于  $3^{2016} = 9^{1008} = (10 - 1)^{1008}$ , 有

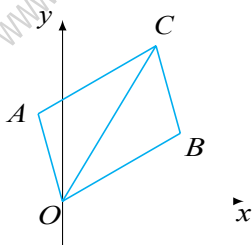
$$3^{2016} \equiv (-1)^{1008} + \binom{1008}{1} (-1)^{1007} \cdot 10 \pmod{100},$$

于是  $3^{2016} \equiv 21 \pmod{100}$ .

2. 复数  $z_1, z_2$  满足  $|z_1| = 2, |z_2| = 3, |z_1 + z_2| = 4$ , 则  $\frac{z_1}{z_2}$  的值是\_\_\_\_\_.

解

设复数  $z_1, z_2, z_1 + z_2$  在复平面内的对应点分别为  $A, B, C$ , 则四边形  $OACB$  构成平行四边形. 复数  $\frac{z_1}{z_2}$  的模为  $\frac{2}{3}$ , 接下来求它的辐角.



在  $\triangle OAC$  中应用余弦定理, 有

$$\cos A = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{4},$$

于是  $\cos \angle AOB = \frac{1}{4}$ , 进而可得

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{15}}{4}i \right) = \frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{15}}{6}i.$$

3. 用  $S(A)$  表示集合  $A$  的所有元素之和, 且  $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $S(A)$  能被 3 整除, 但不能被 5 整除, 则符合条件的非空集合  $A$  的个数是\_\_\_\_\_.

解 70.



将集合  $A$  划分为

$$A_1 = \{1, 4, 7\}, A_2 = \{2, 5, 8\}, A_3 = \{3, 6\},$$

于是使得  $S(A)$  能被 3 整除的非空集合  $A$  的个数有

$$[(C_3^0 + C_3^3)^2 + (C_3^1)^2 + (C_3^2)^2] \cdot 2^2 - 1 = 87.$$

接下来考虑  $S(A)$  能被 15 整除的非空集合  $A$  的个数, 此时  $S(A) = 15$  或  $S(A) = 30$ .

(1)  $S(A) = 15$ . 此时按最大元素分别为 8, 7, 6, 5 分类, 分别有 5, 4, 3, 1 个, 共计 13 个.

(2)  $S(A) = 30$ . 此时只需要考虑  $S(A) = 6$  的情形, 共有 4 个.

综上所述, 符合条件的非空集合  $A$  的个数为  $87 - 13 - 4 = 70$ .

4. 已知  $\triangle ABC$  中,  $\sin A + 2 \sin B \cos C = 0$ , 则  $\tan A$  的最大值是\_\_\_\_\_.

解  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

由  $\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$ , 得

$$3 \sin B \cos C + \cos B \sin C = 0, \text{ 即 } 3 \tan B + \tan C = 0.$$

于是

$$\tan A = -\tan(B + C) = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \cdot \tan C} = \frac{\tan B}{1 + 3 \tan^2 B} = \frac{1}{\frac{1}{\tan B} + 3 \tan B} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

等号当  $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\tan C = -\sqrt{3}$  时取得. 因此  $\tan A$  的最大值为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

5. 若对任意实数  $x$  都有  $|2x - a| + |3x - 2a| \geq a^2$ , 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

解  $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ .

易知函数  $f(x) = |2x - a| + |3x - 2a|$  在  $x = \frac{2a}{3}$  处取得最小值  $f(\frac{2a}{3}) = \frac{|a|}{3}$ , 于是解不等式

$$\frac{|a|}{3} \geq a^2, \text{ 得 } -\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{3}.$$

因此  $a$  的取值范围是  $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ .

6. 若  $a \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ ,  $b \in (0, 1)$ ,  $x = (\sin a)^{\log_b \sin a}$ ,  $y = (\cos a)^{\log_b \cos a}$ , 则  $x$  \_\_\_\_\_  $y$  (填  $>$ ,  $=$ ,  $<$ ).

解  $>$ .

取对数, 可得

$$\ln x = \frac{\ln^2 \sin a}{\ln b}, \ln y = \frac{\ln^2 \cos a}{\ln b},$$

而

$$\sin a > \cos a \Rightarrow 0 > \ln \sin a > \ln \cos a \Rightarrow \frac{\ln^2 \sin a}{\ln^2} > \frac{\ln^2 \cos a}{\ln^2} \Rightarrow \frac{\ln^2 \sin a}{\ln b} > \frac{\ln^2 \cos a}{\ln b},$$

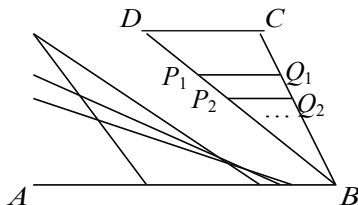
因此  $\ln x > \ln y$ , 从而  $x > y$ .



7. 梯形  $ABCD$  中  $AB \parallel CD$ , 对角线  $AC, BD$  交于  $P_1$ , 过  $P_1$  作  $AB$  的平行线交  $BC$  于点  $Q_1$ .  $AQ_1$  交  $BD$  于  $P_2$ , 过  $P_2$  作  $AB$  的平行线交  $BC$  于点  $Q_2$ ,  $\dots$ . 若  $AB = a$ ,  $CD = b$ , 则  $P_n Q_n =$  \_\_\_\_\_ (用  $a, b, n$  表示).

解  $\frac{ab}{a+bn}$ .

如图.



设  $P_n Q_n = x_n (n \in \mathbb{N})$ , 则  $x_0 = CD = b$ , 且

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{a},$$

于是可得  $\frac{1}{x_n} = \frac{n}{a} + \frac{1}{x_0}$ , 即  $x_n = \frac{ab}{a+bn} (n \in \mathbb{N})$ .

8. 数列  $\{a_n\}$  中  $a_n = \sqrt[n]{n}$  是与  $\frac{1}{n}$  最接近的整数, 则

解  $\frac{444}{5}$ .

记  $k = \text{round}(\sqrt[n]{n})$ , 则有  $k = \sqrt[n]{n} + \frac{1}{2}$ , 即

$$k \leq \sqrt[n]{n} + \frac{1}{2} < k+1, \text{ 也即 } k^2 - k + \frac{1}{4} \leq n < k^2 + k + \frac{1}{4}$$

因此  $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$  为

$$\underbrace{1, 1}_{2 \text{ 个}}, \underbrace{2, 2}_{4 \text{ 个}}, \dots, \underbrace{k, k}_{2k \text{ 个}}, \dots, \underbrace{44, 44}_{88 \text{ 个}}, \underbrace{44, 45, 45, \dots, 45}_{36 \text{ 个}}$$

进而可得

$$\sum_{n=1}^{2016} \frac{1}{a_n} = \sum_{k=1}^{44} \frac{1}{k} \cdot 2k + \frac{1}{45} \cdot 36 = \frac{444}{5}.$$

$$\sum_{n=1}^n \frac{1}{a_n} =$$

9. 已知  $a, b, c > 0$ ,  $a + b + c = 3$ , 求证:  $\sum_{k=1}^3 \frac{a^2}{a + bc} + \frac{b^2}{b + ca} + \frac{c^2}{c + ab} \geq 2$ .

解 由均值不等式, 有

$$LHS \geq \sum_{cyc} \frac{2a^2}{2a + b + c}$$

再由柯西不等式, 有

$$\sum_{cyc} \frac{2a^2}{2a + b + c} \geq \frac{2(a+b+c)^2}{4(a+b+c)} = \frac{3}{2},$$

因此原不等式得证.



10. 求所有函数  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ , 使得对任意正整数  $x = y$ ,  $0 < |f(x) - f(y)| < 2|x - y|$ .

解  $f(n) = f(1) + n - 1$ , 其中  $f(1) \in \mathbb{N}^*$ .

根据题意, 取  $y = x + 1$ , 则有对任意  $x \in \mathbb{N}^*$ , 均有

$$0 < |f(x+1) - f(x)| < 2, \text{ 即 } |f(x+1) - f(x)| = 1.$$

考虑到对任意正整数  $x = y$ ,  $|f(x) - f(y)| > 0$ , 因此  $f$  为单射. 这就意味着  $f(x+1) - f(x) \equiv 1$  或  $f(x+1) - f(x) \equiv -1$  (否则必然出现不同的自变量映射到同一个正整数). 考虑到象的集合为  $\mathbb{N}^*$ , 因此  $f(x+1) - f(x) \equiv 1$ , 进而可得  $f(n) = f(1) + n - 1$ , 其中  $f(1) \in \mathbb{N}^*$ .

11. 求方程  $2^x - 5^y \cdot 7^z = 1$  的所有非负整数解  $(x, y, z)$ .

解  $(x, y, z) = (1, 0, 0), (3, 0, 1)$ .

根据题意, 有

$$(-1)^x - (-1)^y \cdot 1^z \equiv 1 \pmod{3},$$

因此  $x$  为奇数且  $y$  为偶数, 设  $x = 2m + 1$ ,  $y = 2n$ , 其中  $m, n \in \mathbb{N}$ . 于是原方程等价于  $2 \cdot 4^m - 25^n \cdot 7^z = 1$ .

若  $n = 0$ , 则

$$2 \cdot (-1)^m \equiv 1 \pmod{5},$$

矛盾, 于是  $n = 0$ . 此时原方程等价于  $2 \cdot 4^m - 7^z = 1$ .

(1) 若  $z = 0$ , 则  $m = 0$ , 因此  $(x, y, z) = (1, 0, 0)$  为符合题意的一组解.

(2) 若  $z = 0$ , 则

$$-(-1)^z \equiv 1 \pmod{4},$$

于是  $z$  为奇数, 设  $z = 2p + 1$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , 则原方程等价于  $2 \cdot 4^m - 7 \cdot 49^p = 1$ . 若  $p = 0$ , 则  $m = 1$ , 因此  $(x, y, z) = (3, 0, 1)$  为符合题意的一组解. 若  $p = 0$ , 则  $m \geq 4$ , 于是

$$-7 \cdot 1^p \equiv 1 \pmod{16},$$

矛盾.

综上所述, 原方程的所有非负整数解为  $(x, y, z) = (1, 0, 0), (3, 0, 1)$ .

