

2016 年中国科学技术大学自主 招生数学试题解答

D



2016 年中国科学技术大学自主招生

数学试题解析

2016. 6

一、填空题（每小题 6 分，共 48 分）

1. 3^{2016} 除以 100 的余数为_____.

解 21.

由于 $3^{2016} = 9^{1008} = (10 - 1)^{1008}$, 有

$$3^{2016} \equiv (-1)^{1008} + C_{1008}^1 \cdot (-1)^{1007} \cdot 10 \pmod{100},$$

于是 $3^{2016} \equiv 21 \pmod{100}$.

2. 复数 z_1, z_2 满足 $|z_1| = 2, |z_2| = 3, |z_1 + z_2| = 4$, 则 $\frac{z_1}{z_2}$ 的值是_____.



橙鹿学历宝
www.cixlb.com

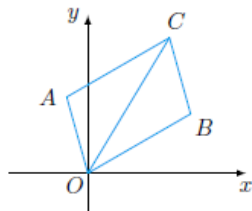
橙鹿学历宝
www.cixlb.com

橙鹿学历宝
www.cixlb.com



解 $\frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{15}}{6}i$.

设复数 $z_1, z_2, z_1 + z_2$ 在复平面内的对应点分别为 A, B, C ，则四边形 $OACB$ 构成平行四边形。复数 $\frac{z_1}{z_2}$ 的模为 $\frac{2}{3}$ ，接下来求它的辐角。



在 $\triangle OAC$ 中应用余弦定理，有

$$\cos A = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{4},$$

于是 $\cos \angle AOB = \frac{1}{4}$ ，进而可得

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{15}}{4}i \right) = \frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{15}}{6}i.$$

3. 用 $S(A)$ 表示集合 A 的所有元素之和，且

$A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ， $S(A)$ 能被 3 整除，但不能被 5 整

除，则符合条件的非空集合 A 的个数

是_____.



将集合 A 划分为

$$A_1 = \{1, 4, 7\}, A_2 = \{2, 5, 8\}, A_3 = \{3, 6\},$$

于是使得 $S(A)$ 能被 3 整除的非空集合 A 的个数有

$$[(C_3^0 + C_3^3)^2 + (C_3^1)^2 + (C_3^2)^2] \cdot 2^2 - 1 = 87.$$

接下来考虑 $S(A)$ 能被 15 整除的非空集合 A 的个数, 此时 $S(A) = 15$ 或 $S(A) = 30$.

(1) $S(A) = 15$. 此时按最大元素分别为 8, 7, 6, 5 分类, 分别有 5, 4, 3, 1 个, 共计 13 个.

(2) $S(A) = 30$. 此时只需要考虑 $S(A) = 6$ 的情形, 共有 4 个.

综上所述, 符合条件的非空集合 A 的个数为 $87 - 13 - 4 = 70$.

4. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\sin A + 2 \sin B \cos C = 0$, 则 $\tan A$ 的最大值是_____.

解 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

由 $\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$, 得

$$3 \sin B \cos C + \cos B \sin C = 0, \text{ 即 } 3 \tan B + \tan C = 0.$$

于是

$$\tan A = -\tan(B + C) = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \cdot \tan C} = \frac{2 \tan B}{1 + 3 \tan^2 B} = \frac{2}{\frac{1}{\tan B} + 3 \tan B} \leq \frac{\sqrt{3}}{3},$$

等号当 $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}, \tan C = -\sqrt{3}$ 时取得. 因此 $\tan A$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. 若对任意实数 x 都有 $|2x - a| + |3x - 2a| \geq a^2$, 则 a 的取值范围是_____.



解 $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

易知函数 $f(x) = |2x - a| + |3x - 2a|$ 在 $x = \frac{2a}{3}$ 处取得最小值 $f\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{|a|}{3}$, 于是解不等式

$$\frac{|a|}{3} \geq a^2, \text{ 得 } -\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{3}.$$

因此 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

6. 若 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, $b \in (0, 1)$, $x = (\sin \alpha)^{\log_b \sin \alpha}$, $y = (\cos \alpha)^{\log_b \cos \alpha}$, 则 x _____

y (填 $>, =, <$)

解 $>$.

取对数, 可得

$$\ln x = \frac{\ln^2 \sin \alpha}{\ln b}, \ln y = \frac{\ln^2 \cos \alpha}{\ln b},$$

而

$$\sin \alpha > \cos \alpha \Rightarrow 0 > \ln \sin \alpha > \ln \cos \alpha \Rightarrow \ln^2 \sin \alpha < \ln^2 \cos \alpha \Rightarrow \frac{\ln^2 \sin \alpha}{\ln b} > \frac{\ln^2 \cos \alpha}{\ln b},$$

因此 $\ln x > \ln y$, 从而 $x > y$.

7. 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 对角线 AC, BD 交于 P_1 , 过 P_1 作

AB 的平行线交 BC 于点 Q_1 , AQ_1 交 BD 于 P_2 , 过 P_2 作 AB

的平行线交 BC 于点 Q_2 , $\dots$, 若 $AB = a, CD = b$, 则

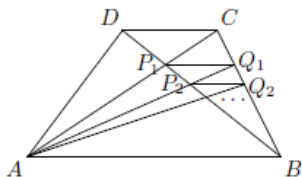
$P_n Q_n =$ _____.



(用 a, b, n 表示)

解 $\frac{ab}{a+bn}$.

如图.



设 $P_n Q_n = x_n (n \in \mathbb{N})$, 则 $x_0 = CD = b$, 且

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{a},$$

于是可得 $\frac{1}{x_n} = \frac{n}{a} + \frac{1}{x_0}$, 即 $x_n = \frac{ab}{a+bn} (n \in \mathbb{N})$.

8. 数列 $\{a_n\}$ 中, a_n 是与 $\sqrt{n}$ 最接近的整数, 则 $\sum_{n=1}^{2016} \frac{1}{a_n} =$

_____.



解 $\frac{444}{5}$.

记 $k = \text{round}(\sqrt{n})$, 则有 $k = \left\lfloor \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$, 即

$$k \leq \sqrt{n} + \frac{1}{2} < k+1, \text{ 也即 } k^2 - k + \frac{1}{4} \leq n < k^2 + k + \frac{1}{4},$$

因此 $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ 为

$$\underbrace{1, 1}_{2 \text{ 个}}, \underbrace{2, 2, 2, 2}_{4 \text{ 个}}, \dots, \underbrace{k, k, \dots, k}_{2k \text{ 个}}, \dots, \underbrace{44, 44, \dots, 44}_{88 \text{ 个}}, \underbrace{45, 45, \dots, 45}_{36 \text{ 个}},$$

进而可得

$$\sum_{n=1}^{2016} \frac{1}{a_n} = \sum_{k=1}^{44} \left(\frac{1}{k} \cdot 2k \right) + \frac{1}{45} \cdot 36 = \frac{444}{5}.$$

二、解答题（第9小题满分16分，第10、11小题满分18分）

9. 已知 $a, b, c > 0$, $a+b+c=3$, 求 $\frac{a^2}{a+\sqrt{bc}} + \frac{b^2}{b+\sqrt{ca}} + \frac{c^2}{c+\sqrt{ab}} \geq \frac{3}{2}$

解 由均值不等式, 有

$$LHS \geq \sum_{cyc} \frac{2a^2}{2a+b+c},$$

再由柯西不等式, 有

$$\sum_{cyc} \frac{2a^2}{2a+b+c} \geq \frac{2(a+b+c)^2}{4(a+b+c)} = \frac{3}{2},$$

因此原不等式得证.

10. 求所有函数 $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, 使得对任意正整数 $x \neq y$

$$0 < |f(x) - f(y)| < 2|x - y|.$$



解 $f(n) = f(1) + n - 1$, 其中 $f(1) \in \mathbb{N}^*$.

根据题意, 取 $y = x + 1$, 则有对任意 $x \in \mathbb{N}^*$, 均有

$$0 < |f(x+1) - f(x)| < 2, \text{ 即 } |f(x+1) - f(x)| = 1.$$

考虑到对任意正整数 $x \neq y$, $|f(x) - f(y)| > 0$, 因此 f 为单射. 这就意味着 $f(x+1) - f(x) \equiv 1$ 或 $f(x+1) - f(x) \equiv -1$ (否则必然出现不同的自变量映射到同一个正整数). 考虑到象的集合为 $\mathbb{N}^*$, 因此 $f(x+1) - f(x) \equiv 1$, 进而可得 $f(n) = f(1) + n - 1$, 其中 $f(1) \in \mathbb{N}^*$.

11. 求方程 $2^x - 5^y \cdot 7^z = 1$ 的所有非负整数解 (x, y, z) .

解 $(x, y, z) = (1, 0, 0), (3, 0, 1)$.

根据题意, 有

$$(-1)^x - (-1)^y \cdot 1^z \equiv 1 \pmod{3},$$

因此 x 为奇数且 y 为偶数, 设 $x = 2m + 1$, $y = 2n$, 其中 $m, n \in \mathbb{N}$. 于是原方程等价于 $2 \cdot 4^m - 25^n \cdot 7^z = 1$.

若 $n \neq 0$, 则

$$2 \cdot (-1)^m \equiv 1 \pmod{5},$$

矛盾, 于是 $n = 0$. 此时原方程等价于 $2 \cdot 4^m - 7^z = 1$.

(1) 若 $z = 0$, 则 $m = 0$, 因此 $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ 为符合题意的一组解.

(2) 若 $z \neq 0$, 则

$$-(-1)^z \equiv 1 \pmod{4},$$

于是 z 为奇数, 设 $z = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$, 则原方程等价于 $2 \cdot 4^m - 7 \cdot 49^p = 1$. 若 $p = 0$, 则 $m = 1$, 因此 $(x, y, z) = (3, 0, 1)$ 为符合题意的一组解. 若 $p \neq 0$, 则 $m \geq 4$, 于是

$$-7 \cdot 1^p \equiv 1 \pmod{16},$$

矛盾.

综上所述, 原方程的所有非负整数解为 $(x, y, z) = (1, 0, 0), (3, 0, 1)$.

