一、 单项选择题：本大题共 5 小题，每小题 5 分,共 25 分.

1. 函数 $f(x)=\dfrac{\cos 3x}{x(x+1)^2}$ 有几个间断点【　　】

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

参考答案：C

简析：本题考的内容为连续点和间断点，属于考纲中需要掌握的知识点，首先，函数 $f(x)$ 分母为 0 的点为，$x=0, x=-1$ 故选 C

2. 设函数 $f(x)=x^4-6x^2+7$，则

A 点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且点 $(1,2)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

B 点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但点 $(1,2)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

C 点 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但点 $(1,2)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D 点 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，且点 $(1,2)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

参考答案：A

简析：本题考的内容为极值和拐点，故选 A

3.通过 $(2,0,1)$，平行于平面 $3x+7y-5z+12=0$ 的平面方程为

A $3x+7y-5z+1=0$　　B $3x+7y-5z-1=0$

C $3x+5y-7z+1=0$　　D $3x+5y-7z-1=0$

参考答案：B

4.下列级数中发散的是

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$　B $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{7^n}$　C $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$　D $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{5}}$

参考答案：**D**

简析：本题考的内容为常数项级数敛散性的判断，属于考纲中需要掌握的知识点。D 选项是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{5}}=1\neq 0$，所以发散，选 D

5. 微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{1+y}$ 的通解为

A $x^2+y^2-2y=c$　　B $x^2+y^2+2y=c$

C $x^2-y^2-2y=c$　　D $x^2-y^2+2y=c$

参考答案：C

简析：本题考的内容为一阶微分方程求通解，属于考纲中需要掌握的知识点。

则分离以后为 $(1+y)dy=xdx$，两端同时积分为 $x^2-y^2-2y=c$ 故选 C

（二）填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分,共 25 分.

6.极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}==$ ________。

参考答案：2

简析：本题考的内容为导数定义，可用“$\frac{0}{0}$”用罗比塔法则，等价替换求极限，属于考纲中需要掌握的知识点。$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$，故答案为 2

7、设方程 $\begin{cases}x=e^{-t}+1\\ y=e^{t}+t^2\end{cases}$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 $\frac{dy}{dx}|_{t=0}=$ ________。

参考答案：-1

8.已知函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 的某领域内连续，且 $f(1)=0$，$f'(1)=\frac{1}{2}$ 则极限 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=$ ____。

参考答案：$\frac{1}{2}$

简析：本题考的内容导数的定义，属于考纲中需要掌握的知识点。使用罗比达，$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=f'(1)=\frac{1}{2}$

9．已知连续函数 $f(x)$ 满足，$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\int_{-1}^{1}f(x)dx$ 则 $f(x)=$ ________。

参考答案：$f(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{\pi}{2}$

简析：本题考属于考纲中需要掌握的知识点，令定积分为K，等式两端同时在 $(-1,1)$ 上积分，则可得 $k=-\frac{\pi}{2}$ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{\pi}{2}$

10 设 L 为由 $(0,0)$ 点到 $(2,3)$ 点的线段，则对弧长的曲线积分 $\int_L(3x-2y+1)ds=$ ____。

参考答案：$\sqrt{13}$

简析：本题考的内容为第一类曲线积分的计算，属于考纲中需要掌握的知识点。可以用性质或由参数方程化为定积分，故答案为 $\sqrt{13}$

三、计算题：本大题共 10 小题，每小题 8 分，共 80 分，计算题要有计算过程。

11.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\int_0^x\cos t dt}{x^3}$。

参考答案：$\frac{1}{6}$

简析：本题考的内容为"$\frac{0}{0}$"极限求法，用洛必达法则，和等价替换，属于考纲中需要掌握的知识点。

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$　　故答案：$\frac{1}{6}$

12 求由方程 $e^y+y\sin x-x=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$。

本题考的内容为隐函数求导，用公式法或者复合求导法可以解决，属于考纲中需要掌握的知识点。

参考答案：$\frac{dy}{dx}=\frac{1-y\cos x}{e^y+\sin x}$

13．求不定积分$\int \sin\sqrt{x}dx$。

参考答案：$-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C$

解：令$\sqrt{x}=t, x=t^2, dx=2tdt$

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\int \sin t\cdot 2tdt=-2\int td\cos t\\
&=-2t\cos t+2\int \cos tdt\\
&=-2t\cos t+2\sin t+C\\
&=-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C
\end{aligned}
$$

14．计算定积分$I=\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$

参考答案：$\frac{1}{3}$；

简析：本题考的内容为定积分法计算（凑微分法），属于考纲中需要掌握的知识点。

解：$I=\int_1^e \ln^2 xd\ln x=\frac{1}{3}(\ln x)^3\Big|_1^e=\frac{1}{3}$

15．设函数$u=f(x^2,x+y^2)$，其中f具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

参考答案：$2xf_1'+f_2'$，$4xyf_{12}''+2yf_{22}''$

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot 1=2xf_1'+f_2'$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}&=2x\left(f_{11}''\cdot 0+f_{12}''\cdot 2y\right)+f_{21}''\cdot 0+f_{22}''\cdot 2y\\
&=4xyf_{12}''+2yf_{22}''
\end{aligned}
$$

16．求函数 $f(x,y,z)=x^2+y^3+z^2-xyz$ 在点 $P(1,0,1)$ 处沿从 P 到 $Q(2,1,2)$ 的方向导数

参考答案：$\sqrt{3}$

简析：本题考的内容为方向导数，属于考纲中需要掌握的知识点。

解：$gradf(1,0,1)=\{2x-yz,3y^2-xz,2z-xy\}=\{2,-1,2\}$，$\vec{PO}=\{1,1,1\}$

从而方向余弦为 $\vec{PO}^{\circ}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ 方向导数为 $\sqrt{3}$

17.计算二重积分 $I=\iint\limits_D(3x+5y)dxdy$，其中 D 是由 $y=x^2$，$y=1$ 所围成的闭区域。

参考答案：4

简析：本题考的内容为直角坐标系下二重积分计算，属于考纲中需要掌握的知识点。

解：$D:\begin{cases}-1\le x\le 1\\ x^2\le y\le 1\end{cases}$；

$$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(3x+5y)dy=\int_{-1}^{1}(3xy\big|_{x^2}^{1}+\frac{5}{2}y^2\big|_{x^2}^{1})dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(3x-3x^3+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}x^4)dx=\int_{0}^{1}(5-5x^4)dx=5x\big|_0^1-x^5\big|_0^1=4$$

18.计算曲线积分 $I=\oint_L(x^3+3x^2y^2-4y)dx+(2x^3y+y^3-x)dy$，其中 L 为 $x^2+y^2=3$ 的正向边界。

参考答案：9π

简析：本题考的内容为第二类曲线积分计算（格林公式），属于考纲中需要掌握的知识点。

解：令 $P=x^3+3x^2y^2-4y,Q=2x^3y+y^3-x$；

则 $\frac{\partial Q}{\partial x}=6x^2y-1,\frac{\partial P}{\partial y}=6x^2y-4$，

由格林公式

$$I=\iint\limits_D[(6x^2y-1)-(6x^2y-4)]dxdy=3\cdot S_D=3\times 3\pi=9\pi$$

19.将函数 $f(x)=\frac{1}{1-x}$ 展开成 $(x+1)$ 的幂级数

参考答案：$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(x+1)^n(-3<x<1)$

简析：本题考的内容为幂级数的展开，属于考纲中需要掌握的知识点。

解：$f(x)=\frac{1}{2-(x+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n(-1<\frac{x+1}{2}<1)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(x+1)^n(-3<x<1)$$

20. 求微分方程 $y''-7y'+10y=10x+3$ 的通解。

参考答案：$y=c_1e^{5x}+c_2e^{2x}+x+1$

简析：本题考的内容为二阶常系数非齐次微分方程，属于考纲中需要掌握的知识点。

对应齐次方程特征方程为 $r^2-7r+10=0$，$r_1=5,r_2=2$

齐次通解为 $Y=c_1e^{5x}+c_2e^{2x}$，

设原方程特解形式为 $y^*=Ax+B$

代入原方程得 $A=1,B=1$ 得 $y^*=x+1$

故原方程的通解为 $y=Y+y^*=c_1e^{5x}+c_2e^{2x}+x+1$

四、应用与证明：本大题共两小题，每题 10 分，共 20 分。应用题的计算要有计算过程，证明题要有证明过程。

21. 求由曲线 $y=e^x$，$x=1$ 及 x 轴所围成的平面图形的面积 S，并求此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 V。

参考答案：$s=e-1$，$v=\frac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)$

简析：本题考的内容为定积分的应用，属于考纲中需要掌握的知识点。

解：$s=\int_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e-1$，

$v=\int_0^1 \pi\left(e^x\right)^2 dx=\frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)$

22. 设当 $x>0$ 时，证明：$\frac{1}{1+x}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$。

简析：本题考的内容为不等式的证明（利用拉格朗日定理），属于考纲中需要掌握的知识点。

证明：令 $f(t)=\ln t$，$f(x)$ 在 $[x,x+1]$ 上连续，在 $(x,x+1)$ 内可导，由拉格朗日定理得至少存在一点 $\xi\in(x,x+1)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}$，即 $\frac{1}{\xi}=\frac{\ln(x+1)-\ln x}{1}$，又

$0<x<\xi<x+1$ 所以 $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{x}$，即，所以 $\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$