广东省 2021 年普通高等学校专升本招生考试高等数学试题

本试卷共 3 页，20 小题，满分 100 分。考试时间 120 分钟。注意事项:

1.考生必须在答题卡上作答，否则答案无效。

2.答卷前，考生务必按答题卡要求填写考生信息栏、粘贴条形码。

3.选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应试题答案的信息点涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。

4,非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔在答题卡各题目指定区域内作答;如需改动，先划掉需改动部分，再重新书写;不得使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

5.考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 6x}{2x}=$（ ）

A.1

B.2

C.3

D.4

2.点 $x=3$ 是 $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$ 的（ ）

A.连续可去间断点

B.可去间断点.

C.无穷间断点

D.跳跃间断点

3.设是 $f(x)$ 的一个原函数，C 为任意常数，则下列正确的是（ ）

A. $\int F(x)dx=f(x)$

B. $F'(x)=f(x)+C$

C. $f'(x)=F(X)+C\ F(x)$

D. $\int f(x)dx=F(x)+C$

4.设常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则下列收敛的是（ ）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}$ （$u_n+\frac{1}{3^n}$）

B. $\sum_{n=1}^{\infty}$ （$u_n+\frac{1}{2}$）

C. $\sum_{n=1}^{\infty}$ （$u_n+\frac{1}{n}$）

D. $\sum_{n=1}^{\infty}$ $(u_n-\frac{1}{\sqrt{n}})$

5.设 $f(x)=\int_0^{x^2}\sin t^2 dt, g(x)=3x^6+4x^5$，当 $x\to 0$ 时，（ ）

A. $f(x)$ 是 $g(x)$ 低阶无穷小

B. $f(x)$ 是 $g(x)$ 高阶无穷小

C. $f(x)$ 是 $g(x)$ 等价无穷小

D. $f(x)$ 是 $g(x)$ 非等价，同阶无穷小

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6.曲线 $\begin{cases} x=2t^3+3, \\ y=t^2-4 \end{cases}$ 在 $t=1$ 相应的点处的切线斜率为________.

7. 求二元函数 $Z=x^2y$ 的全微分 dz（ ）

8. 微分方程 $\frac{dy}{dx}=y+2$，初值为 $y|_{x=0}=-1$ 的特解为 $y=$（ ）

9. 设平面区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 3-x\}$, 求 $\iint_D d\sigma=$（ ）

10. 连续函数 $f(x)$, 满足 $\int_0^{2x+1} f(t)dt=-2x^3+1$, 则 $f(3)=$（ ）

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+3}-x$ 的值。

12.设 $y=2^{x}+x^{x}(x>0)$,求 $\frac{dy}{dx}$。

13.求不定积分 $\int(2x+5)\cos 3x dx$ 。

14.求定积分 $\int_{-2}^{2}\frac{x^{2021}+|x|}{x^{2}+1}dx.$

15. 设 $Z=Z(x,y)$,是 $e^{zy}-xz=1$.所确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$.

16. 已知 $x^{2}+y^{2}\leq 4$ 的第一象限为平面区域 D, 求二重积分 $\iint_{D}e^{x^{2}+y^{2}}d\partial.$

17. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^{n}$ 的收敛性。

18.设 $f(x)=\begin{cases}x^{2},x\leq 2,\\ 6-x,x>2,\end{cases}$ 求 $F(x)=\int_{0}^{\pi}f(t)dt$ 的表达式，并讨论 $F(x)$ 在点 $x=2$ 的连续性.

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19. 做一个容积为 64π 立方米吗的圆柱形无盖容器，其底面与侧面所用材质相同且厚度不计，问底面半径为何值时，才能使得使用材料最省？

20. 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线 L，该切线与直线 $x=1$ 及 $y=\ln x$ 围成平面图形 D.

（1）求切线 L 的方程；

（2）求平面图形 D 的面积。

广东省 2021 年普通高等学校专升本招生考试

高等数学参考答案

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

题目	1	2	3	4	5
答案	C	B	D	A	B

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. $\frac{1}{3}$

7. $2xydx+x^2dy$

8. $y=e^x-2$

9. $=\frac{(2+3)\times 1}{2}=\frac{5}{2}$

10. -3

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11.解：原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(x^2+3-x^2)}{\sqrt{x^2+3}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3}+x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{3}{2}$

12.解：设 $z=x^x$，则 $\ln z=x\ln x.$

上式两边对 x 求导得

$\frac{z'}{z}=\ln x+1,$

则 $z'=z(\ln x+1)=x^x(\ln x+1).$

因此，$\frac{dy}{dx}=\frac{d2^x}{dx}+\frac{dx^x}{dx}=2^x\ln 2+x^x(\ln x+1).$

13.解：原式$=\frac{1}{3}\int(2x+5)d(\sin 3x)$

$$=\frac{1}{3}(2x+5)\sin 3x-\frac{2}{3}\int \sin 3x dx$$

$$=\frac{1}{3}(2x+5)\sin 3x+\frac{2}{9}\cos 3x+C.$$

14.解：$\because \frac{x^{2021}}{x^2+1}$ 为奇函数且积分区间关于原点对称.

$$\therefore \int_{-2}^{2}\frac{x^{2021}}{x^2+1}dx=0;$$

$\because \frac{|x|}{x^2+1}$ 为偶函数且积分区间关于原点对称，

$$\therefore \int_{-2}^{2}\frac{|x|}{x^2+1}dx=2\int_{0}^{2}\frac{x}{x^2+1}dx$$

故，原式$=\int_{-2}^{2}\frac{x^{2021}}{x^2+1}dx+\int_{-2}^{2}\frac{|x|}{x^2+1}dx$

$$=0+2\int_{0}^{2}\frac{x}{x^2+1}dx=(x^2+1)\Big|_0^2=\ln 5.$$

15.解：令 $F(x,y,z)=e^{yz}-xz-1$,

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z}{ye^{yz}-x}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{-ze^{yz}}{ye^{yz}-x}$$

因此，$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z(1-e^{yz})}{ye^{yz}-x}$

16：解：由极坐标变换公式，

原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2 re^{r^2}dr$

$$=\frac{\pi}{4}e^{r^2}\Big|_0^2=\frac{\pi}{4}(e^4-1)$$

17.解：由于 $\frac{n}{2n+1}<\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$，则

$$(\frac{n}{2n+1})^n<(\frac{1}{2})^n.$$

又由于 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$ 收敛，根据正项级数比较审敛法，

可得$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$收敛

18.解：当$x\le 2$时，$F(x)=\int_0^x t^2dt=\frac{x^3}{3}$；

当$x>2$时，$F(x)=\int_0^2 t^2dt+\int_2^x(6-t)dt=-\frac{x^2}{2}+6x-\frac{22}{3}$.

所以，$F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, x\le 2,\\ -\frac{x^2}{2}+6x-\frac{22}{3}, x>2.\end{cases}$

由于$\lim\limits_{x\to 2^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^3}{3}=\frac{8}{3}$;

$\lim\limits_{x\to 2^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(-\frac{x^2}{2}+6x-\frac{22}{3}\right)=\frac{8}{3}$

所以，$\lim\limits_{x\to 2^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}F(x)=F(2)$，故$F(x)$在点$x=2$连续.

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19.解：设该容器的底面半径为r米，高为h米.

由题设知$64\pi=\pi r^2h$，从而$h=\frac{64}{r^2}$,

该容器的表面积$S=\pi r^2+\pi\frac{128}{r}$.

令$S'=2\pi r-\pi\frac{128}{r^2}=0$，解得$r=4$

当$r>4$时，$S'>0$;当$r<4$时，$S'<0$,

从而$r=4$为S的最小值点.

故底面半径为 4 米时，所用材料最省.

20.解：（1）设切点为(x_0,y_0),其中$y_0=\ln x_0$，则

切线 L 的方程为$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$,

由于 L 过原点，从而$0-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(0-x_0)$，故$x_0=e$

因此，切线 L 的方程为$y=e^{-1}x$.

（2）平面图形 D 的面积为 $\int_1^e (e^{-1}x-\ln x)dx$

$$=\frac{1}{2e}x^2\Big|_1^e-\int_1^e \ln x dx$$

$$=\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}-(x\ln x\Big|_1^e-e+1)$$

$$=\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}-(e-e+1)=\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}-1.$$