



一、单项选择题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分. 每小题只有一个选项符合题目要求)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} [\cos x - f(x)] = 1$, 则下列等式正确的是
- A. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ B. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cos x = 1$
- C. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + \cos x] = 1$
2. 函数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ 的极小值是
- A. $x = -1$ B. $x = 0$
- C. $x = 1$ D. $x = 2$
3. 已知 3^x 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f(x) =$
- A. 3^x B. $3^x \ln 3$
- C. $x3^{x-1}$ D. $\frac{3^x}{\ln 3}$
4. 设平面区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$, 则 $\iint_D (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} d\sigma =$
- A. $\frac{\pi}{10}$ B. $\frac{\pi}{9}$
- C. $\frac{\pi}{5}$ D. $\frac{2\pi}{9}$
5. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $0 \leq a_n \leq \frac{1}{5^n}$, 则下列级数发散的是
- A. $\sum_{n=1}^{\infty} 3a_n$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+3}$
- C. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right)$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{\sqrt{n^3}} \right)$

二、填空题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 若函数 $f(x) = \begin{cases} (1+a)x^2, & x \leq 1, \\ a(x-2)^3 + 3, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续, 则常数 $a =$ _____.
7. 曲线 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 3$ 在 $(2, -1)$ 点处的切线方程为 $y =$ _____.
8. 微分方程 $y'' + 3y' - 4y = 0$ 的通解为 $y =$ _____.



9. 设二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个领域有定义, 且当 $x \neq 0$ 时, $\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 3x + 2$, 则 $f'_x(0, 0) =$ _____.
10. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导且满足 $f(x) = f''(x)$, $f(0) = m$, 如果 $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = 8$, 则 $m =$ _____.

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \arctan t dt}{x}$.
12. 已知 y 是 x 的函数, 且 $y' = \ln \sqrt{x} + \sqrt{\ln x} + 2 \ln 2$, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=e}$.
13. 求不定积分 $\int (\cos 2x - x \sin x^2) dx$.
14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{1+x^2}, & x \leq 1, \\ x, & x > 1. \end{cases}$ 求定积分 $\int_{-3}^0 f(x+2) dx$.
15. 求二元函数 $z = 3xy^2 + \frac{x^2}{y}$ 的全微分 dz , 并求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
16. 计算 $\iint_D y d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y = x$, $y = x - 2$ 与 $y = 0$, $y = 2$ 围成的有界区域.
17. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x}{y^2}$, 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解.
18. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n n!}$ 的收敛性.

四、综合题 (本大题共 2 小题, 第 19 小题 10 分, 第 20 小题 12 分, 共 22 分)

19. 设有界平面图形 G 由曲线 $y = e^{ax}$ 和直线 $y = e$, $x = 0$ 围成, 其中常数 $a > 0$, 若 G 的面积等于 1.
- (1) 求 a 的值;
- (2) 求 G 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积 V .
20. 设函数 $f(x) = \frac{a}{1 + e^{bx}}$, 其中 a, b 为常数, 且 $ab \neq 0$.
- (1) 判别 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的单调性;
- (2) 求曲线 $y = f(x)$ 的拐点;
- (3) 求曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线方程.