一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1. 函数 $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2+x-2}$ 的间断点是（　）

A. $x=-2$ 和 $x=0$　　B. $x=-2$ 和 $x=1$

C. $x=-1$ 和 $x=2$　　D. $x=0$ 和 $x=1$

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, x<0 \\ 2, x=0 \\ \cos x, x>0 \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$（　）

A. 等于 1　　B. 等于 2

C. 等于 1 或 2　　D. 不存在

3. 已知 $\int f(x)\,dx=\tan x+C$，$\int g(x)\,dx=2^x+C$，C 为任意常数，则下列等式正确的是（　）

A. $\int [f(x)g(x)]dx=2^x\tan x+C$　　B. $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx=2^{-x}\tan x+C$

C. $\int f[g(x)]dx=\tan(2^x)+C$　　D. $\int [f(x)+g(x)]dx=\tan x+2^x+C$

4. 下列级数收敛的是（　）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}-\frac{1}{n^3}\right)$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{n}\right]$

5. 已知函数 $f(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在点 $x=-1$ 处取得极大值，则常数 a,b 应满足条件（　）

A. $a-b=0, b<0$　　B. $a-b=0, b>0$

C. $a+b=0, b<0$　　D. $a+b=0, b>0$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 曲线$\begin{cases} x = t^3 + 3t \\ y = \arcsin t \end{cases}$，则 $t = 0$ 的对应点处的切线方程为 $y =$____________.

7. 微分方程 $ydx + xdy = 0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=1} = 2$ 的特解为 $y =$____________.

8. 若二元函数 $z = f(x,y)$的全微分 $dz = e^x \sin y\, dx + e^x \cos y\, dy$，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$____________.

9. 设平面区域 $D = \{(x,y)|0 \le y \le x, 0 \le x \le 1\}$，则 $\iint_D x\, dxdy =$____________.

10. 已知$\int_1^t f(x)\, dx = t \sin\frac{\pi}{t} (t > 1)$，则 $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx =$____________.

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$.

12. 设 $y = \frac{x^x}{2x+1}(x > 0)$，求$\frac{dy}{dx}$.

13. 求不定积分$\int \frac{2+x}{1+x^2} dx$.

14. 计算定积分$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} x\sqrt{2x+1}\, dx$.

15. 设 $x - z = e^{xyz}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$ 和$\frac{\partial z}{\partial y}$.

16. 计算二重积分$\iint_D \ln(x^2 + y^2)\, d\sigma$，其中平面区域 $D = \{(x,y)\,|\,1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$.

17. 已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足 $0 \le a_n < b_n$，且$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^4}{3n^4 + 2n - 1}$，判定级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性.

18. 设函数 $f(x)$满足$\frac{df(x)}{de^{-x}} = x$，求曲线 $y = f(x)$的凹凸的区间。

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19. 已知连续函数$\varphi(x)$满足$\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x t\varphi(t)dt + x\int_x^0 \varphi(t)dt$

（1）求$\varphi(x)$；

（2）求由曲线 $y = \varphi(x)$和 $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ 及 $y = 0$ 围成的图形绕 x 轴旋转所得立体的体积.

20. 设函数 $f(x) = x\ln(1+x) - (1+x)\ln x$.

（1）证明：$f(x)$在区间$(0, +\infty)$内单调减少；

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1.B

解释：$f(-2)$无定义，$\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-x}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{6}{0}=\infty$，第二类间断点

$f(1)$无定义，$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{1}{3}$，可去间断点

2.A

解释：$\lim\limits_{x\to0^+}\cos x=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}x+1=1$ 左右极限存在且相等

3.D

解释：不定积分的线性性质

4.C

解释：$2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$为公比为$\frac{1}{3}$的等比级数，公比小于 1 故收敛

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$为 $p=3$ 的 p 级数，$p>1$ 故收敛

5.B

解释：$f'(x)=a-\frac{b}{x^2}$，$x=-1$ 取极大值一阶导为 0，$a-b=0$

$f''(x)=\frac{2b}{x^3}$，$x=-1$，取极大值二阶导小于 0，$b>0$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6.$y=\frac{1}{3}x$

解释：$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{3t^2+3}$，当 $t=0$ 时，$x=0,y=0,y'=\frac{1}{3}$

7.$y=\frac{2}{x}$

解释：$\frac{1}{y}dy=-\frac{1}{x}dx$

$\ln y=-\ln x+\ln C$

$y=\frac{C}{x}$，当 $x=1$ 时,$y=2$,故 $C=2$

$y=\frac{2}{x}$

8.$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x\cos y$

解释：$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\sin y$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x\cos y$

9.$\frac{1}{3}$

解释：$\int_0^1 dx\int_0^x xdy=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}$

10.π

解释：$\lim\limits_{t\to+\infty} t\sin\frac{\pi}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{t}}{\frac{1}{t}}=\pi$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. $\frac{1}{2}$

原式=$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-\sin x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+\sin x}{2}=\frac{1}{2}$

12.$y'=\frac{x^x}{2x+1}\left[(\ln x+1)-\frac{1}{2x+1}\right]$

解释：$y=e^{x\ln x}(2x+1)^{-1}$

$y'=(\ln x+1)e^{x\ln x}(2x+1)^{-1}+e^{x\ln x}(-1)(2x+1)^{-2}(2)$

$y'=\frac{x^x}{2x+1}\left[(\ln x+1)-\frac{2}{2x+1}\right]$

13. $2\arctan x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

解释：$\int\frac{2+x}{1+x^2}dx=2\int\frac{1}{1+x^2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}dx^2=2\arctan x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

14. $-\frac{1}{15}$

解释：令$\sqrt{2x+1}$，$x=\frac{t^2-1}{2}$，$dx=tdt$

原式=$\int_0^1\frac{t^2-1}{2}t^2dt=\frac{1}{2}\int_0^1t^4-t^2dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^1=-\frac{1}{15}$

15. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-yze^{xyz}}{1+xye^{xyz}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-xze^{xyz}}{1+e^{xyz}}$

解释：令 $F(x,y,z)=x-z-e^{xyz}$

$F_x=1-yze^{xyz}$，$F_y=-xze^{xyz}$，$F_z=-1-xye^{xyz}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{1-yze^{xyz}}{1+xye^{xyz}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{-xze^{xyz}}{1+e^{xyz}}$

16. $\pi(8\ln 2-3)$

解释：原式=$\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2r\ln r^2\,dr=\pi\int_1^2\ln r^2\,dr^2=\pi(r^2\ln r^2-r^2)\Big|_1^2=\pi(8\ln 2-3)$

17. 收敛

解释：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(n+1)^4}{3n^4+2n-1}=\frac{1}{3}$，由比值法得知$b_n$收敛

$b_n>a_n$，由比较法得知大的收敛，小的就收敛，故a_n收敛

18. 凹区间$(1,+\infty)$，凸区间$(-\infty,1)$

解释：$\frac{df(x)}{de^{-x}}=x\Rightarrow\frac{df(x)}{-e^{-x}dx}=x\Rightarrow\frac{df(x)}{dx}=-xe^{-x}\Rightarrow\frac{d^2f(x)}{dx^2}=(x-1)e^{-x}$

令$f''(x)=0$，得 $x=1$。当 $x>1$ 时，$y''>0$；当 $x<1$ 时，$y''<0$

故凹区间$(1,+\infty)$，凸区间$(-\infty,1)$

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19.解释：$(1)\varphi' = 1 + \int_x^0 \varphi(x)\,dx$

$$\varphi'' = -\varphi(x)$$

$y'' + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 0，\beta = 1$

$\varphi(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$ ， $\varphi'(x) = -C_1\sin x + C_2\cos x$

$\varphi(0) = 1，\varphi'(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1，C_2 = 1$

$\varphi(x) = \cos x + \sin x$

$$(2)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x + \cos x)^2 dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + 2\sin x\cos x\,dx = \frac{\pi^2}{2} + 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,d\sin x = \frac{\pi^2}{2} + \pi$$

20.解释：$(1)f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} - \ln x - \frac{x+1}{x}$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2x+1}{x^2+x}$$

$f''(x) = \frac{x^2+x+1}{(x^2+x)^2} > 0$，故$f'(x)$单调增加

$f'(x) < \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$，故 $f(x)$单调减少

$(2)f(x)$单调减小且 $f(3) = \ln 4^3 - \ln 3^4 < 0$

故 $f(2018) < f(3) < 0$

即 $\ln 2019^{2018} - \ln 2018^{2019} < 0$

$$2019^{2018} < 2018^{2019}$$