机密★启用前

# 广东省2018年普通高等学校本科插班生招生考试

# 高等数学

**一、单项选择题（本大题共5小题，每小题3分，共15分。每小题只有一个选项符合题目要求）**

1．$\lim\limits_{x\to 0}\left(3x\sin\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)=$

A．0　　B．1

C．3　　D．4

2．设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=-1$，$f'(1)=0$，$f''(0)=-1$，$f''(1)=3$，则下列结论正确的是

A．点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点

B．点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C．点 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点

D．点 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

3．已知 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+C$，其中 $C$ 为任意常数，则 $\int f(x^2)\mathrm{d}x=$

A．$x^5+C$　　B．$x^4+C$

C．$\frac{1}{2}x^4+C$　　D．$\frac{2}{3}x^3+C$

4．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}=$

A．2　　B．1

C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{1}{2}$

5. 已知 $D=\{(x,y)|4\le x^2+y^2\le 9\}$，则 $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma=$

A. $2\pi$

B. $10\pi$

C. $2\pi\ln\frac{3}{2}$

D. $4\pi\ln\frac{3}{2}$

## 二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 已知 $\begin{cases}x=\log_3 t\\ y=3^t\end{cases}$，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=$____________.

7. $\int_{-2}^{2}(|x|+\sin x)dx=$____________.

8. $\int_0^{+\infty}e^{1-2x}dx=$____________.

9. 二元函数 $z=x^{y+1}$，当 $x=e$，$y=0$ 的全微分 $dz|_{\substack{x=e\\y=0}}=$____________.

10. 微分方程 $x^2dy=ydx$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解为 $y=$____________.

## 三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. 确定常数 $a,b$ 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x+a}{x^2+1}, & x<0\\ b, & x=0\\ \left(1+\frac{2}{x}\right)^x, & x>0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续.

12. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]$.

13. 求由方程 $(1+y^2)\arctan y=xe^x$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$.

14. 已知 $\ln(1+x^2)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int xf'(x)dx$.

15. 求由曲线 $y=1+\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ 和直线 $y=0$，$x=0$ 及 $x=1$ 所围成的平面图形的面积 $A$.

16. 已知二元函数 $z=\frac{xy}{1+y^2}$，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

17. 求 $\iint\limits_D\sqrt{1-\frac{x}{y}}d\sigma$，其中 $D$ 是由直线 $y=x,y=1,y=2$ 及 $x=0$ 所围成的闭区域.

18. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{|\sin n|+2^n}$ 的敛散性.

**四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）**

19. 已知函数 $f(x)$满足 $f''(x)-4f(x)=0$ 且曲线 $y=f(x)$在点(0,0)处的切线与直线 $y=2x+1$ 平行.

（1）求 $f(x)$；

（2）求曲线 $y=f(x)$的凹凸区间与拐点.

20. 已知函数 $f(x)=\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t$.

（1）求 $f'(0)$；

（2）判断 $f(x)$的奇偶性，并说明理由；

（3）$x>0$，证明：$f(x)>x-\frac{1+\lambda}{3\lambda}x^3(\lambda>0)$.

**一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）**

1．B　　2．C　　3．D　　4．C　　5．A

**二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）**

6．$3\ln^2 3$　　7．4　　8．$\frac{e}{2}$　　9．$\mathrm{d}x+e\mathrm{d}y$　　10．$e^{1-\frac{1}{x}}$

**三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）**

11．解：$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x+a}{x^2+1}=a$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}}=e^0=1$$

$\because f(x)$在 $x=0$ 处连续，$\therefore a=b=1$

12．解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}$

13．解：令 $f(x,y)=(1+y^2)\arctan y-xe^x$

$\therefore f_x(x,y)=-x-xe^x$，$f_y(x,y)=2y\arctan y+1$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}=\frac{e^x+xe^x}{2y\arctan y+1}$

14．解： $\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x$ ……①

$\because$ $\ln(1+x^2)$是函数 $f(x)$的一个原函数

$\therefore$ $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

$\therefore$ ① $=x\cdot\frac{2x}{1+x^2}-\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{2x^2}{1+x^2}-\ln(1+x^2)+C$

15．解：$A=\int_0^1\left(1+\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)\mathrm{d}x\xRightarrow{\text{令}\sqrt{x}=t}\int_0^1\left(2t+\frac{2t^2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=\int_0^1(2t+2)\mathrm{d}t-\int_0^1\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$=3-2\cdot(\arctan t)\Big|_0^1=3-2\cdot\frac{\pi}{4}=3-\frac{\pi}{2}$

16．解：$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x(1+y^2)-xy\cdot 2y}{(1+y^2)^2}=\frac{x-xy^2}{(1+y^2)^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}$$

17．解：$\iint_D\sqrt{1-\frac{x}{y}}\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^y\sqrt{1-\frac{x}{y}}\mathrm{d}x$

$$=\int_1^2\left[\left(-\frac{2}{3}y\left(1-\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^y\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^2\frac{2}{3}y\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3}y^2\Big|_1^2$$

$$=1$$

18．解：$\because\ \frac{n}{|\sin n|+2^n}<\frac{n}{2^n}$，令$u_n=\frac{n}{2^n}$

$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1$

由比值判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$收敛，因此由比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{|\sin n|+2^n}$收敛

**四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）**

19．解：(1) 把 $f''(x)-4f(x)=0$ 化为 $y''-4y=0$

其特征方程为$r^2-4=0$，解得$r_{1,2}=\pm 2$

$\therefore y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$

由题意：$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=2$

$\therefore \begin{cases} C_1+C_2=0 \\ 2C_1-2C_2=2 \end{cases}$ 解得$\begin{cases} C_1=\frac{1}{2} \\ C_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$ $\therefore f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}$

（2）$f'(x)=e^{2x}+e^{-2x}$，$f''(x)=2e^{2x}-2e^{-2x}$

令$f''(x)=0$，解得 $x=0$

当 $x<0$ 时，$y''<0$　　当 $x>0$ 时，$y''>0$

故$f(x)$的凸区间为$(-\infty,0)$，凹区间为$(0,+\infty)$，拐点为$(0,0)$

20. 解：(1) 由定义法得$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2\,dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x^2=1$

(2) $f(-x)=\int_0^{-x}\cos t^2\,\mathrm{d}t \xRightarrow{令\ t=-u} \int_0^x \cos u^2\,\mathrm{d}(-u)=-\int_0^x \cos u^2\,\mathrm{d}(u)=-f(x)$

故 $f(x)$为奇函数

(3) 令 $g(x)=f(x)-x+\frac{1+\lambda}{3\lambda}x^3 \ \left(\lambda>0,\ x>0\right)$

$\therefore\ g'(x)=\cos x^2-1+\frac{1+\lambda}{\lambda}x^2$

$g''(x)=-2x\sin x^2+\frac{2(1+\lambda)}{\lambda}x=2x(\frac{1+\lambda}{\lambda}-\sin x^2)$

$\because\ \lambda>0,\ 0\le\sin x^2\le 1 \quad \therefore\ \frac{1+\lambda}{\lambda}-\sin x^2>0$

当 $x>0$ 时，$g''(x)>0 \quad \therefore g'(x)$是单调递增的

又 $\because\ g'(0)=0 \quad \therefore\ g'(x)>0$

$\therefore\ g(x)$是单调递增，且 $g(0)=0$

$\therefore\ x>0$ 时，$f(x)-x+\frac{1+\lambda}{3\lambda}x^3>0\ (\lambda>0)$

得证。