机密★启用前

广东省 2017 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1．下列极限等式不正确的是

A．$\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}=0$　　　B．$\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}}=1$

C．$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=0$　　　D．$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

2．若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=4$, 则常数 $a=$

A．ln2　　　B．2ln2

C．1　　　D．4

3．设 $F(x)$是可导函数 $f(x)$的一个原函数，C 为任意常数，则下列等式不正确的是

A．$\int f'(x)dx=f(x)+C$　　　B．$[\int f(x)\mathrm{d}x]'=f(x)$

C．$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+\mathrm{C}$　　　E．$\int F(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$

4．已知函数 $f(x)$在区间[0，2]上连续，且$\int_0^2 xf(x)dx=4$, 则$\int_0^4 f(\sqrt{x})dx=$

A．2　　　B．4

C．6　　　D．8

5．将二次积分 $I=\int_{-1}^{1}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x^2+y^2)dy$化为极坐标形式的二次积分，则 I=

A．$\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 rf(r^2)dr$　　　B．$\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 f(r^2)dr$

C．$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rf(r^2)dr$　　　D．$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 f(r^2)dr$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6．已知当 $x\to 0$ 时，$f(x)\sim 2x$, 则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{f(x)}=$__________.

7．若常数 $p>1$ ，则广义定积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=$__________.

8．设二元函数 $z=f(x,y)$的全微分 $\mathrm{d}z=\frac{-y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy$, 则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____________.

9．微分方程$y''-9y=0$ 的通解为 $y=$____________.

10．级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$的和为____________.

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{1-\cos x}$.

12．设 $y=x^{x^2}(x>0)$, 求y'.

13．设函数 $f(x)=\int_1^x\sqrt{(t-1)^2+1}\,dt$, 求曲线 $y=f(x)$的凹凸区间和拐点.

14．求不定积分$\int x\cos(x+2)dx$.

15．设$(x-y)^3+z+\tan z=0$, 求$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$.

16．求二重积分$\iint_D e^{x^3}d\sigma$, 其中 D 是由曲线 $y=x^2$和直线 x=1 及 y=0 围成的有界闭区域.

17．若曲线经过点（0，1），且该曲线上任意一点（x, y）处的切线斜率为 $2y+e^x$, 求这条曲线的方程.

18．判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{4^n}{n!}\right)$的敛散性.

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19．设函数 $f(x)=\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$.

（1）求曲线 $y=f(x)$的水平渐近线方程；

（2）求曲线 $y=f(x)$和直线 x=0, x=1 及 y=0 围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积 V.

20．已知函数 $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$.

（1）证明：当 $x>0$ 时，恒有 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$;

（2）试问方程 $f(x)=x$ 在区间（0，+∞）内有几个实根？

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．C　　2．B　　3．D　　4．D　　5．A

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6．3　　7．$\frac{1}{p-1}$　　8．$-\frac{1}{x^2}$　　9．$C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$　　10．1

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x}-3x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3e^{3x}-3}{x}=3\lim\limits_{x\to0}\frac{3e^{3x}}{1}=9$

12．解：运用对数求导法，

等式两边同时取对数得$\ln y=x^2\ln x$，

两边同时对 x 求导得$\frac{y'}{y}=x+2x\ln x$，

所以 $y'=(x+2x\ln x)x^{x^2}$.

（或 $y'=(1+2\ln x)x^{x^2+1}$）

13．函数的定义域为$\left(-\infty，+\infty\right)$，

$$f'(x)=\sqrt{(x-1)^2+1}，f''(x)=\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+1}}$$

令 $f''(x)=0$，解得 $x=1$，$f(1)=0$.

当 $x>1$ 时 $f''(x)>0$；$x<1$ 时 $f''(x)<0$.

根据定积分的几何意义，

所以曲线的凹区间为$(1,+\infty)$，曲线的凸区间为$(-\infty,1)$，曲线的拐点为$(1,0)$

$$\int x\cos(x+2)\,\mathrm{d}x$$

$$=x\sin(x+2)-\int\sin(x+2)\,\mathrm{d}x$$

$$=x\sin(x+2)+\cos(x+2)+C$$

15．解：根据隐函数求导法则，设 $F(x,y,z)=(x-y)^3+z+\tan z=0$，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{3(x-y)^2}{1+\sec^2 z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-3(x-y)^2}{1+\sec^2 z}$$

因此 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

16．解：由题意，可以画出图像，得到区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le x^2\}$，所以有

$$\iint\limits_D e^{x^3}\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}e^{x^3}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{3}e^{x^3}\Big|_0^1=\frac{e-1}{3}.$$

17．解：根据导数的几何意义得，$k=y'=2y+e^x$，即 $y'-2y=e^x$，

根据一阶线性非齐次方程的通解公式得

$$y=e^{-\int-2\mathrm{d}x}\left(\int e^x e^{\int-2\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=e^{2x}\left(\int e^x e^{-2x}\,\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=-e^x+C\cdot e^{2x}$$

将点(0,1)代入通解，得 $C=2$，

所以曲线方程为 $y=-e^{x}+2e^{2x}$.

18．解：设$a_n=\frac{1}{n^2}$, $b_n=\frac{4^n}{n!}$

a_n是 $p-$级数，$p>1$, 所以是收敛的；$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{4^n}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n+1}=0$，所以$b_n$是收敛的

根据级数收敛的线性性质，因此题中的数列是收敛的.

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19．解：(1) 根据水平渐近线的定义，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}=1,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}=-1$$

所以，$y=\pm 1$ 是曲线的水平渐近线.

(2) 曲线绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^1\left(\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\pi\left[x|_0^1+\ln(1+x^2)|_0^1\right]=(1+\ln 2)\pi$$

20．(1) 解法一：证明如下：当 $x>0$ 时

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\arctan\frac{1}{x}+\arctan x$$

设 $a=\arctan x$ $b=\arctan\frac{1}{x}$，则有

$x=\tan a$ $\frac{1}{x}=\tan b$ 即$\tan a=\frac{1}{\tan b}=\cot b=\tan\left(\frac{\pi}{2}-b\right)$，所以 $a=\frac{\pi}{2}-b$

因此 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$

解法二：设 $F(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}$

$$F'(x)=-\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=0$$

$F(x)=c$,c 为任意常数　　得 $F(1)=\arctan 1+\arctan 1=\frac{\pi}{2}$

(2) 设函数 $y=\arctan\frac{1}{x}-x$，当 $x>0$ 时, $y'=-\frac{1}{1+x^2}-1<0$，函数 y 在区间 $(0,+\infty)$是单调递减的，

$$\lim_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x}-x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to+\infty}\arctan\frac{1}{x}-x=-\infty$$

所以在区间 $(0,+\infty)$上，$-\infty<y<\frac{\pi}{2}$，且函数 $y=\arctan\frac{1}{x}-x$ 是单调递减，

因此方程 $f(x)=x$ 在区间 $(0,+\infty)$内有一个实根.