广东省 2016 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1．设函数 $f(x)=\begin{cases}3x+a, & x\geq 1,\\ x+1, & x<1,\end{cases}$ 在点 x=1 处连续，则常数 a=

A．-1　　　　B．0

C．1　　　　D．2

2．已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=6$，则 $f'(x_0)=$

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．6

3．若点（1，2）为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则常数 a 与 b 的值应分别为

A．-1 和 3　　　　B．3 和-1

C．-2 和 6　　　　D．6 和-2

4．设函数 $f(x)$ 在区间 [-1，1] 上可导，C 为任意实数，则 $\int \sin x f'(\cos x)dx=$

A．$\cos x f(\cos x)+C$　　　　B．$-\cos x f(\cos x)+C$

C．$f(\cos x)+C$　　　　D．$-f(\cos x)+C$

5．已知常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和 $S_n=\frac{n}{n+1}(n\in N^*)$，则下列常数项级数中，发散的是

A．$\sum_{n=1}^{\infty}2u_n$　　　　B．$\sum_{n=1}^{\infty}u_n+u_{n+1}$

C．$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n+\frac{1}{n}\right)$　　　　D．$\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{3}{x}=$____________.

7．设 $y=\frac{x}{1+x^2}$，则 $dy|_{x=0}=$____________.

8．设二元函数 $z=x\ln y$,则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=$____________.

9．设平面区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，则 $\iint_D (x^2+y^2)d\sigma=$____________.

10．椭圆曲线$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转一周而形成的旋转体体积 $V=$____________.

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{x^3})$.

12．求曲线 $3x^2+y+e^{xy}=2$ 在点(0，1)处的切线方程.

13．求不定积分$\int\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

14．计算定积分$\int_0^1 x2^x dx$.

15．设 $z=u^v$，而 $u=2x+y$，$v=x$，求$\frac{\partial z}{\partial x}|_{\substack{x=1\\y=0}}$和$\frac{\partial z}{\partial y}|_{\substack{x=1\\y=0}}$.

16．设平面区域 D 由曲线 xy=1 和直线 y=x 及 x=2 围成，计算二重积分$\iint_D \frac{x}{y^2}d\sigma$.

17．已知函数 $y=e^{2x}$是微分方程$y''-2y'+ay=0$ 的一个特解，求常数 a 的值，并求该微分方程的通解.

18．已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$满足$u_{n+1}=\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^n u_n(n\in N^*)$, 且$u_1=1$, 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的收敛性.

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19．设函数 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2$，证明：

（1）当 $x\to 0$ 时，$f(x)$是比 x 高阶的无穷小量；

（2）当 $x>0$ 时，$f(x)>0$.

20．已知定义在区间$[0,+\infty)$上的非负可导函数 $f(x)$满足 $f^2(x)=\int_0^x \frac{1+f^2(t)}{1+t^2}dt(x\geq 0)$.

（1）判断函数 $f(x)$是否存在极值，并说明理由；

（2）求 $f(x)$.

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．A　　2．B　　3．A　　4．D　　5．C

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6．3　　7．dx　　8．$\frac{1}{y}$　　9．$\frac{\pi}{2}$　　10．$\frac{8\pi}{3}$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．解：$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

12．解：等式两边对 x 求导得：$6x+\frac{dy}{dx}+e^{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0$

即$\frac{dy}{dx}(1+xe^{xy})=-6x-ye^{xy}$

$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{-6x-ye^{xy}}{1+xe^{xy}},\frac{dy}{dx}|_{\substack{x=0\\y=1}}=-1.$

故曲线在点（0, 1）处的切线方程为 $y-1=-(x-0)$，即 $y=-x+1$

13．解：设$\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2, dx=2tdt$

$$\therefore\int\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\int\frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}2tdt$$

$$=2\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=2\arcsin t+c$$

$$=2\arcsin\sqrt{x}+c$$

14．解：$\int_0^1 x2^x dx=\frac{1}{\ln2}\int_0^1 xd2^x$

$$=\frac{1}{\ln2}\left(x2^x\Big|_0^1-\int_0^1 2^x dx\right)$$

$$=\frac{1}{\ln2}\left(2-\frac{2^x}{\ln2}\Big|_0^1\right)=\frac{1}{\ln2}\left(2-\frac{1}{\ln2}\right)$$

15．解：$\because\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2vu^{v-1}+u^v\ln u$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=vu^{v-1}$$

又∵当 x = 1,y = 0 时，u = 2,v = 1

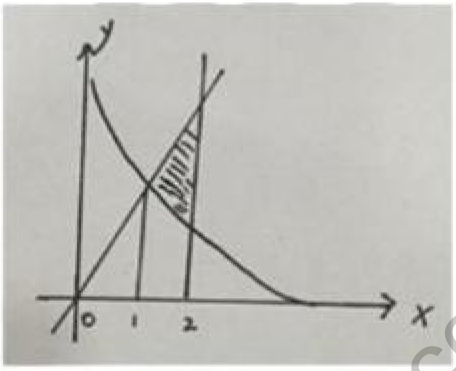
$$\therefore \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}} = 2 + 2\ln 2\ ,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}} = 1$$

16．解：积分区域 D 如图所示

$$\iint_D \frac{x}{y^2} d\sigma = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x}{y^2} dy$$

$$= \int_1^2 \left(-\frac{x}{y}\bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}\right) dx = \int_1^2 (-1 + x^2) dx$$

$$= \left(-x + \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_1^2 = \frac{4}{3}$$



17．解：根据题中的函数，可以计算出 $y' = 2e^{2x}$，$y'' = 4e^{2x}$.

由题意知：$4e^{2x} - 4e^{2x} + ae^{2x} = 0$，即 $ae^{2x} = 0$

$\therefore a = 0$

当 $a = 0$ 时，微分方程为 $y'' - 2y' = 0$，其特征方程为

$r^2 - 2r = 0$，解得 r = 0 及 r = 2

所以，微分方程的通解为 $y = c_1 + c_2e^{2x}$.

18．解：由题意知，该级数为正项级数，用比值审敛法判定

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{3}$

$\therefore$由$\frac{e}{3}<1$ 可知，该级数收敛.

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 12 分，第 20 小题 10 分，共 22 分）

19．证明：(1) $\because \lim\limits_{n\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1+x}{1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+x}-1+x\right)=0$$

$\therefore$当 $x\to 0$ 时，$f(x)$是比 x 高阶的无穷小量. 5 分

(2) $\because$当 $x\geq 0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{1+(1+x)(x-1)}{1+x}$

$=\frac{x^2}{1+x}\geq 0$，且等号仅在 x=0 处成立

$\therefore f(x)$ 在区间$[0,+\infty)$内单调递增. 8 分

故当 $x>0$ 时，有 $f(x)>f(0)=0$ 10 分

20．(1) 条件等式两边对 x 求导得

$2f(x)f'(x)=\frac{1+f^2(x)}{1+x^2}\quad(x\geq 0)$ ① 3 分

因为$\frac{1+f^2(x)}{1+x^2}\neq 0$，所以 $f'(x)\neq 0$，即 $f(x)$无驻点，故 $f(x)$不存在极值. 6 分

（注：只要能合理说明 $f(x)$是单调递增的，由此得到 $f(x)$无极值的结论也对，例如：

$\because f(x)\geq 0$，且$\frac{1+f^2(x)}{1+x^2}>0$ 由①知，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$单调递增，故 $f(x)$不存在极值）.

(2) 令 $f(x)=y$，则由①式得

$2yy'=\frac{1+y^2}{1+x^2}$, 且$y|_{x=0}=0$

即$\frac{2ydy}{1+y^2}=\frac{1}{1+x^2}dx$

$\int\frac{2y}{1+y^2}dy=\int\frac{1}{1+x^2}dx$ 9 分

即$\ln(1+y^2)=\arctan x+c$

由$y|_{x=0}=0 \Rightarrow c=0$

故 $1+y^2=e^{\arctan x}$，因此 $f(x)=y=(e^{\arctan x}-1)^{\frac{1}{2}}(x\geq 0)$. 12 分