机密★启用前

广东省2015年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共5小题，每小题3分，共15分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1．若当 $x\to 0$ 时，$kx+2x^2+3x^3$ 与 x 是等价无穷小，则常数 k=

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

2．已知函数 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数，且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)=1$，则下列结论正确的是

A．x_0 为 $f(x)$ 的极小值点　　B．x_0 为 $f(x)$ 的极大值点

C．x_0 不是 $f(x)$ 的极小值点　　D．$(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

3．设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，C 为任意实数，则 $\int f(2x)dx=$

A．$F(x)+C$　　B．$F(2x)+C$

C．$\frac{1}{2}F(2x)+C$　　D．$2F(2x)+C$

4．若函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+kx$ 在区间 $[0,1]$ 上满足罗尔（Rolle）定理的条件，则常数 k=

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

5．下列级数中，收敛的是

A．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$

B．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$

C．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

D．$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{n^2}\right]$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6．曲线 $y=\left(1-\frac{5}{x}\right)^x$ 的水平渐近线为 $y=$______________.

7．设函数 $y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\tan t\\ y=t^3+2t\end{cases}$所确定，则$\frac{dy}{dx}|_{t=0}=$______________.

8．广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^6}dx=$______________.

9．微分方程$y'-xy=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解 $y=$______________.

10．设函数 $f(x)=log_2x(x>0)$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$______________.

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2(x-1)}{x-1}, & x<1\\ a, & x=1\\ x+b, & x>1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续，常数 a 和 b 的值.

12．求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{x^3}$.

13．设 $y=\ln\frac{e^x}{e^x+1}$，求$y''|_{x=0}$.

14．计算不定积分$\int\frac{\sqrt{x+2}}{x+3}dx$.

15．求由曲线 $y=x\cos 2x$和直线 $y=0$，$x=0$ 及$\frac{\pi}{4}$围成的平面图形的面积.

16．将二次积分 $I=\int_{-1}^{1}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}e^{x^2+y^2}dy$化为极坐标形式的二次积分，并计算 I 的值.

17．求微分方程$y''+2y'+5y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=2$，$y'|_{x=0}=0$ 的特解.

18．判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n+1}$的收敛性.

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 12 分，第 20 小题 10 分，共 22 分）

19 .设二元函数 $z=f(x,y)=x^y\ln x(x>0,x\neq 1)$,平面区域 $D=\{(x,y)\mid 2\leq x\leq e,-1\leq y\leq 1\}$.

（1）求微积分 dz；

（2）求 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma$.

20．已知 $f(x)$是定义在 R 上的单调递减的可导函数，且 $f(1)=2$, 函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt-x^2-1$.

（1）判别曲线 $y=F(x)$在 R 上的凹凸性，并说明理由；

（2）证明：方程 $F(x)=0$ 在区间$(0，1)$内有且仅有一个实根.

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．B　　2．A　　3．C　　4．C　　5．D

二、填空题（本大题共 5 小题，每个空 3 分，共 15 分）

6．e^{-5}　　7．2　　8．$\frac{1}{5}$　　9．$e^{\frac{1}{2}x^2}$　　10．$-\frac{1}{x\ln 2}$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．解：$\because \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sin 2(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sin 2(x-1)}{2(x-1)}\cdot 2=2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+b)=1+b$

$f(1)=a$

$\therefore$ 当 $a=1+b=2$，即 $a=2,b=1$ 时，$f(x)$在 $x=1$ 处连续.

12．解法一：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}{6x}=-\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{3}$

解法二：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{3(1+x^2)}=-\frac{1}{3}$

13．解：$\because y=x-\ln(e^x+1)$

$\therefore y'=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}$

$y''=\frac{-e^x}{(e^x+1)^2}$，故 $y''|_{x=0}=-\frac{1}{4}$

14．解：设$\sqrt{x+2}=t$,则 $x=t^2-2,dx=2tdt$,

$\therefore \int\frac{\sqrt{x+2}}{x+3}dx=\int\frac{t}{t^2+1}\cdot 2tdt$

$=2\int\frac{t}{t^2+1}\cdot tdt=2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt$

$$= 2(t - arctant) + C = 2\left(\sqrt{x+2} - arctan\sqrt{x+2}\right) + C$$

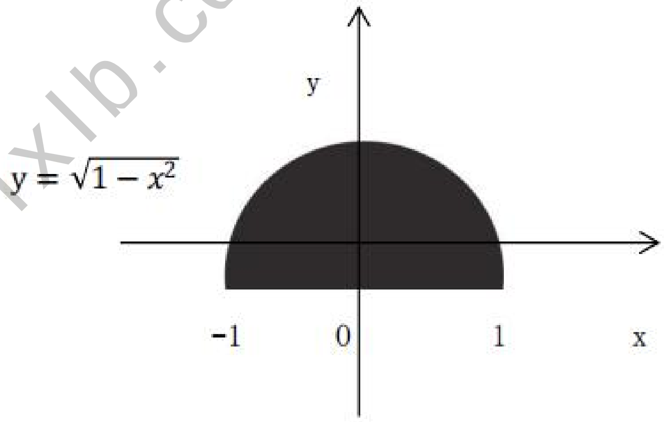
15．解：所求面积 A $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x d\sin 2x = \frac{1}{2}\left(x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx\right)$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

16．由给定的二次积分知，积分区域 D $= \left\{(x,y)\middle| -1 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$

如图



$$\therefore \mathrm{I} = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{1} e^{r^2} \cdot r dr = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_0^1\right) d\theta = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\right) d\theta = \frac{\pi}{2}(e-1)$$

17．解：微分方程的特征方程为$r^2 + 2r + 5 = 0$

解得 $r = -1 \pm 2i$

微分方程的通解为 $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$

$\therefore y' = -e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + e^{-x}(-2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x)$

$\therefore\ y|_{x=0} = C_1 = 2$，$y'|_{x=0} = -C_1 + 2C_2 = 0$, 解得$C_1 = 2, C_2 = 1$

故微分方程的特解为 $y = e^{-x}(2\cos 2x + \sin 2x)$

18．解法一：显然$\frac{n^2}{3^n+1} < \frac{n^2}{3^n}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} / \frac{n^2}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2} = \frac{1}{3} < 1$

则由比值审敛法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$收敛

$\therefore$则由比较审敛法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n+1}$收敛.

解法二：$\because \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}+1} \Big/ \frac{n^2}{3^n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{3^n+1}{3^{n+1}+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1+\frac{1}{3^n}}{3+\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1$

$\therefore$则由比值审敛法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n+1}$收敛.

四、综合题（大题共 2 小题，第 19 题 12 分，第 20 题 10 分，共 22 分）

19．解：(1) $\because \frac{\partial z}{\partial x} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x = x^{y-1}(1 + y\ln x), \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln^2 x$

$\therefore dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = x^{y-1}(1 + y\ln x)dx + x^y ln^2 x dy$

(2) $\iint_D f(x,y)\, d\sigma = \int_2^e dx \int_{-1}^{1} x^y \ln x dy$

$= \int_2^e \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \ln x\right)\Big|_2^e = \frac{1}{2}e^2 + \ln 2 - 3$

20．(1) 解：$\because F'(x) = f(x) - 2x$，$F''(x) = f'(x) - 2$

且由题意可知$f'(x) \le 0 (x \in R)$

$\therefore F''(x) < 0 (x \in R)$

故曲线 $y = F(x)$在 R 上是上凸的.

(2) 证：显然 $F(x)$在 R 上是连续，且 $F(0) = -1 < 0$

$F(1) = \int_0^1 f(t)\, dt - 2 > \int_0^1 2 dt - 2 = 0$

$\therefore$方程 $F(x) = 0$ 在区间$(0，1)$内至少有一个实根.

由$F''(x) < 0$ 知$F'(x)$在 R 上单调递减

$\therefore x < 1$ 时，有$F'(x) > F'(1) = f(1) - 2 = 0$

∴方程 $F(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

由 $F''(x)<0$ 知 $F'(x)$ 在 R 上单调递减

∴$x<1$ 时，有 $F'(x)>F'(1)=f(1)-2=0$

由此知 $F(x)$ 在（$0,1$）内单调递增

因此方程在区间 $(0,1)$ 内至多只有一个实根

故方程 $F(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有且只有一个实根.