



机密★启用前

广东省 2013 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时，下列无穷小量中，与 x 不等价的无穷小量是

- A. $\ln(x+1)$ B. $\arcsin x$ C. $1-\cos x$ D. $\sqrt{1+2x}-1$

2. 曲线 $y = \frac{x^3}{x^2-1}$

- A. 只有水平渐近线 B. 只有铅垂渐近线

- C. 既有水平渐近线也有铅垂渐近线 D. 无渐近线

3. 下列函数中，有区间 $[-1, 1]$ 上满足罗尔(Rolle)定理条件的是

- A. $y = x^{\frac{2}{3}}$ B. $y = |x|$ C. $y = x^{\frac{4}{3}}$ D. $y = x^{\frac{5}{3}}$

4. 设函数 $f(x) = x \sin x + \cos x$, 则下列结论正确的是

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $f(0)$ 和 $f(\frac{\pi}{2})$ 都是 $f(x)$ 的极小值

D. $f(0)$ 和 $f(\frac{\pi}{2})$ 都是 $f(x)$ 的极大值

5. 若函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足 $F'(x) = f(x) (x \in \mathbb{R})$, 则下列等式成立的是

A. $\int \frac{1}{x} F(2 \ln x + 1) dx = 2 f(2 \ln x + 1) + C$ B. $\int \frac{1}{x} F(2 \ln x + 1) dx = \frac{1}{2} f(2 \ln x + 1) + C$

C. $\int \frac{1}{x} f(2 \ln x + 1) dx = 2 F(2 \ln x + 1) + C$ D. $\int \frac{1}{x} f(2 \ln x + 1) dx = \frac{1}{2} F(2 \ln x + 1) + C$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 要使函数 $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$ 在 $x=1$ 处连续，应补充定义 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.



7. 曲线 $\begin{cases} x = 3^t \\ y = \tan t \end{cases}$ 在 $t=0$ 相应的点处的切线方程是 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 函数 $f(x) = \begin{cases} x(1-x)^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$, 在 $x=0$ 处的左导数 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 已知平面图形 $G = \{(x, y) | x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$, 将图形 G 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 $V = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设 D 为圆环域: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, 则二重积分 $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题(本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(e^{\frac{1}{x}} - 1)$.

12. 已知函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数, 且 $f(0) \cdot f'(0) \neq 0$, 求常数 a 和 b 的值, 使

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{af(x) + bf(2x) - f(0)}{x} = 0.$$

13. 求由方程 $xy \ln y + y = e^{2x}$ 所确定的隐函数在 $x=0$ 处的导数 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

14. 求曲线 $y = \ln(\sqrt{x^2 + 4} + x)$ 的凹、凸区间及其拐点坐标.

15. 计算不定积分 $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$.

16. 计算定积分 $\int_0^2 \frac{x}{(x+2)\sqrt{x+1}} dx$.

17. 求二元函数 $z = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt$ 的全微分 dz 及二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

18. 求微分方程 $y'' - 2y' + (1-k)y = 0$ (其中常数 $k \geq 0$) 的通解.

四、综合题(本大题共 2 小题, 第 19 小题 10 分, 第 20 小题 12 分, 共 22 分)

19. 交换二次积分 $I = \int_0^1 dx \int_{e^x}^e \frac{(2x+1)(2y+1)}{\ln y + 1} dy$ 的积分次序, 并求 I 的值.

20. 已知 $f(x)$ 的定义在区间 $[0, +\infty)$ 上的非负可导函数, 且曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0, x=0$ 及 $x=t(t \geq 0)$ 围成的曲边梯形的面积为 $f(t) - t^2$.

(1) 求函数 $f(x)$;



(2) 证明：当 $x > 0$ 时， $f(x) > x^2 + \frac{x^3}{3}$.