广东省 2012 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1．已经三个数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$和$\{c_n\}$满足$a_n \le b_n \le c_n$（$n\in N^+$），且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$（a、c 为常数，且 a<c），则数列$\{b_n\}$必定

A．有界　　B．无界　　C．收敛　　D．发散

2．x=0 是函数$f(x)=\begin{cases}(1-2x)^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ e^2+x, & x\ge 0\end{cases}$的

A．连续点　　B．可去间断点

C．跳跃间断点　　D．第二类间断点

3．极限$\lim\limits_{x\to\infty} 2x\sin\frac{3}{x}=$

A．0　　B．2　　C．3　　D．6

4．如果曲线$y=ax-\frac{x^2}{x+1}$的水平渐近线存在，则常数$a=$

A．2　　B．1　　C．0　　D．-1

5．设$f(x, y)$为连续函数，将极坐标形式的二次积分$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$化为直角坐标形式，则$I=$

A．$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$　　B．$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

C．$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$　　D．$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6．设 f (x) 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=3$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$____________.

7．若 $f(x)=\int\frac{\tan x}{x}dx$，则$f''(\pi)=$____________.

8．若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 (-1，0)，则常数 b=____________.

9．广义积分 $\int_{-\infty}^{0}\dfrac{e^x}{1+e^x}dx=$____________.

10．设函数 $f(u)$ 可微，且 $f'(0)=\frac{1}{2}$，则 $z=f(4x^2-y^2)$ 在点 (1，2) 处的全微分

$dz\big|_{(1,2)}=$__________.

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

12．设函数 y=f (x) 由参数方程$\begin{cases}x=\ln\left(\sqrt{3+t^2}+t\right)\\ y=\sqrt{3+t^2}\end{cases}$所确定，求$\dfrac{dy}{dx}$（结果要化为最简形式）.

13．确定函数 $f(x)=(x-1)e^{\frac{\pi}{4}+\arctan x}$的单调区间和极值.

14．求不定积分$\int\ln\left(1+x^2\right)dx$.

15．设 $f(x)=\begin{cases}x^3e^{x^4+1}, & -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}\\ \frac{1}{x^2}, & x>\frac{1}{2}\end{cases}$，利用定积分的换元法求定积分$\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)dx$.

16．求微分方程 $y''-4y'+13y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$、$y'|_{x=0}=8$ 的特解.

17．已知二元函数 $z=x(2y+1)^x$，求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

18．计算二重积分$\iint_D\sqrt{y^2-x}\,d\sigma$，其中 D 是由曲线 $y=\sqrt{x}$ 及直线 y=1，x=0 围成的闭区域.

四、综合题（大题共 2 小题，第 19 小题 12 分，第 20 小题 10 分，共 22 分）

19．已知 C 经过点 M(1，0)，且曲线 C 上任意点 P(x，y) (x≠0) 处的切线斜率与直线 OP（O 为坐标原点）的斜率之差等于 ax（常数 a>0）.

（1）求曲线 C 的方程；

（2）明确 a 的值，使曲线 C 与直线 y=ax 围成的平面图形的面积等于$\frac{8}{3}$.

20．若当 x→0，函数 $f(x)=\int_0^x 2^{t^3-3t+a}dt$ 与 x 是等价无穷小量；

（1）求常数 a 的值；

（2）证明：$\frac{1}{2}\le f(2)\le 8$．