2022 年贵州专升本高等数学真题及答案：

2022 年《高等数学》真题（回忆版）

一、单选题（50 分）

1. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}e^{-3x}$，则 $f''(\frac{1}{3})=$

答案：$\frac{3}{e}$

2. 设 $f(x)$ 是可积的且为 T 的周期函数，其中 $\int_0^T f(x)dx=100$，则 $\int_a^{a+T} af(x)dx=$（　　）

答案：$100a$

3. $(\int df(x))'=$（　　）

答案：$f'(x)$

4. 直线 l 与 $y=x^2-e^{x^2}$ 相切，l 的斜率平行于 x 轴，则切点为（　　）

答案：$(0,-1)$

5. 下列说法正确的是（　　）

答案：导数不存在的点和驻点可能是极值点

6. 若函数 $f(x)$ 的导数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数是（　　）

答案：$2022-\sin x$

7. $g''(x_0)=0$ 是拐点 $(x_0,g(x_0))$ 的（　　）条件

答案：必要不充分条件（必要非充分条件）

8. $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}=$（　　）

答案：$\frac{f'(a)}{f(a)}$

9. 若函数 $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x$ 在 $x=1$ 处有极小值 -2，则 $\alpha=$ ______，$\beta=$ ______.

答案：$\alpha=0$，$\beta=-3$.

10. $S_1=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x}{x}dx$，　$S_2=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{x}{\sin x}dx$，与$\frac{\pi}{6}$比大小

答案：$S_1<\frac{\pi}{6}<S_2$

二、填空题（50 分）

11. 函数 $y=\arccos(x-2$

答案：$[1,3]$ 或 $\{x|1\le x\le 3\}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+1}{2x+1}\sin\frac{4}{x}=$________

答案：8

13. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+2x)-f(1)}{x}=\frac{1}{4}$，则 $f'(1)=$______.

答案：$\frac{1}{8}$

14. 半径为 r 的球体，加热后半径为 $r+dr$，则 $dV=$__________.

答案：$4\pi r^2dr$

15. 已知 $y=\ln(\csc x-\cot x)$，则 $y'=$__________.

答案：$\csc x$

16. 函数 $y=xe^{-x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的最大值为______.

答案：e^{-1} 或 $\frac{1}{e}$

17. 函数 $y=\arctan x$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的 $\xi=$ ________.

答案：$\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}$ 或 $\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$

18. 函数 $y=xe^{-x^2}(x>0)$ 的拐点为__________

答案：$(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}})$

19. $\int_{-3}^{3} e^{|x|}(1+x)dx =$ ____________.

答案：$2e^3-2$

20. 曲线 $y^2 = x-4$ 在 $y=0$ 和 $x=10$ 处绕x轴旋转的旋转体体积为________.

答案：18π

三、计算题（28 分）

21. （7 分）计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$

令 $x_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}$

设 $y_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{1}}=\frac{n}{n+\sqrt{1}}$，

$z_n = \frac{1}{n+\sqrt{n}}+\frac{1}{n+\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}=\frac{n}{n+\sqrt{n}}$ （2 分）

$\because \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{1}}=1$， $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=1$，（2 分）

$\therefore$由夹逼定理可得：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1$ （3 分）.

22. （7 分）计算积分 $\int x\ln(x-2)dx$

解：原式 $=\frac{1}{2}x^2\ln(x-2)-\int\frac{1}{x-2}\cdot\frac{1}{2}x^2dx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln(x-2)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-4+4}{x-2}dx$ （2 分）

$=\frac{1}{2}x^2\ln(x-2)-\frac{1}{2}\int(x+2+\frac{4}{x-2})dx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln(x-2)-\frac{1}{2}\int(x+2)dx-2\int\frac{1}{x-2}d$

$=\frac{1}{2}x^2\ln(x-2)-\frac{1}{4}x^2-x-2\ln|x-2|+C$ （2 分）

23. （7 分）计算 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{3}x^2e^{-x^3}dx$.

解：原式 $=-\frac{1}{9}\int_0^{+\infty}e^{-x^3}d(-x^3)$

$=-\frac{1}{9}e^{-x^3}\Big|_0^{+\infty}$

$=-\frac{1}{9}(\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x^3}-e^0)$

$=\frac{1}{9}$ （2 分）

24. （7 分）求由方程 $\cos(x-y)-e^{x^2}+y^3=22$ 所确定的隐函数的一阶导数 y'.

解：【法一】（1）令 $F(x,y)=\cos(x-y)-e^{x^2}+y^3-22=0$；（1 分）

（2）$F_x=-\sin(x-y)-e^{x^2}\cdot 2x$，$F_y=\sin(x-y)+3y^2$；（4 分）

（3）$y'=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{\sin(x-y)+e^{x^2}\cdot 2x}{\sin(x-y)+3y^2}$ （2 分）

【法二】$-\sin(x-y)\cdot(1-y')-e^{x^2}\cdot 2x+3y^2\cdot y'=0$ （3 分）

$\Rightarrow[\sin(x-y)+3y^2]y'=\sin(x-y)+2xe^{x^2}$ （1 分）

$\Rightarrow y'=\frac{\sin(x-y)+e^{x^2}\cdot 2x}{\sin(x-y)+3y^2}$ （3 分）

四、证明题（10 分）

25. （10 分）证明：当 $x\geq 0$，$\frac{1}{2}x^2+x+1\leq e^x$.

证明：令 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1-e^x$，在 $[0,+\infty)$ 上连续，

$\because f'(x)=x+1-e^x$，$f''(x)=1-e^x$，

又 $\because f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒小于零

∴ $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，（2 分）

∵ $f'(x) < f'(0) = 0$，

∴ $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，（2 分）

∴ $f(x) < f(0) = 0$，即当 $x \ge 0$，$\frac{1}{2}x^2 + x + 1 \le e^x$．（2 分）

六、综合题（12 分）

26. （12 分）已知函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\cos(\frac{\pi}{2}x)}{1-x}, x<1 \\ x^{\frac{1}{1-x}}, x>1 \end{cases}$ 极限存在，求 a．

解：$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{a\cos(\frac{\pi}{2}x)}{1-x} = \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{a\cdot[-\sin(\frac{\pi}{2}x)]\cdot\frac{\pi}{2}}{(-1)} = \lim\limits_{x\to1^-} a\cdot\sin(\frac{\pi}{2}x)\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}a$ （4 分）

$\lim\limits_{x\to1^+} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to1^+}\ln x^{\frac{1}{1-x}}} = e^{\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}}{-1}} = e^{-1}$ （4 分）

∵ 函数 $f(x)$ 的极限存在

∴ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x)$，即 $\frac{\pi}{2}a = e^{-1} \Rightarrow a = \frac{2}{e\pi}$ （4 分）

26. （12 分）已知函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\cos(\frac{\pi}{2}x)}{1-x}, x<1 \\ x^{\frac{1}{1-x}}, x>1 \end{cases}$ 极限存在，求 a．

解：$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{a\cos(\frac{\pi}{2}x)}{1-x} = \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{a\cdot[-\sin(\frac{\pi}{2}x)]\cdot\frac{\pi}{2}}{(-1)} = \lim\limits_{x\to1^-} a\cdot\sin(\frac{\pi}{2}x)\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}a$ （4 分）

$\lim\limits_{x\to1^+} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to1^+}\ln x^{\frac{1}{1-x}}} = e^{\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}}{-1}} = e^{-1}$ （4 分）

∵ 函数f(x)的极限存在

∴ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x)$，即 $\frac{\pi}{2}a = e^{-1} \Rightarrow a = \frac{2}{e\pi}$ （4 分）