一、选择题（每个小题给出的选项中，只有一项符合要求：本题共有 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分）

1.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x}, & x<0\\ e^{x}, & x\geq 0\end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）

A.连续点　　B.可去间断点　　C.跳跃间断点　　D.无穷间断点

【答案】A

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0^{+}}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}e^{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^{-}}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{\tan x}{x}=1$，$f(0)=1$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0^{+}}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^{-}}f(x)=f(0)$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

2.当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+ax^{2})$ 与 $1-\cos x$ 是等价无穷小量，则 a 的值为（　　）

A. -1　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

【答案】C

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax^{2})}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^{2}}{\frac{1}{2}x^{2}}=2a=1, a=\dfrac{1}{2}$.

3.下列说法错误的是（　　）

A.如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

B.如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导.

C.如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值.

D.如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $x_0\in(a,b)$ 是其极值点，则 $f'(x_0)=0$

【答案】B

【解析】连续不一定可导.A 选项为零点定理，C 选项为最值定理，D 选项为极值存在的必要条件.

4.记 $I_1=\int_0^1\frac{e^x}{1+\sin x}dx, I_2=\int_0^1(\frac{e^{2x}}{1+\sin x})^2dx, I_3=\int_0^1(\frac{e^{3x}}{1+\sin x})^3dx$，则（　　）

A. $I_1<I_2<I_3$　　B. $I_1<I_3<I_2$　　C. $I_2<I_1<I_3$　　D. $I_3<I_2<I_1$

【答案】A

【解析】因为所有选项的积分区间相同，故比较积分大小只要比较被积函数在此区间内大小即可.

当 $x\in[0,1]$ 时，令 $f(x)=e^x-1-\sin x$，$f'(x)=e^x-\cos x\ge 0\ (x\in[0,1])$，则 $f(x)$ 单调递增，又 $f(0)=0$，则 $f(x)>0$，即 $e^x>1+\sin x$，即 $\frac{e^x}{1+\sin x}>1$，

$g(x)=(\frac{e^{2x}}{1+\sin x})^2$ 中 $\frac{e^{2x}}{1+\sin x}=\frac{e^x}{1+\sin x}e^x\ge\frac{e^x}{1+\sin x}>1$，则 $(\frac{e^{2x}}{1+\sin x})^2\ge\frac{e^x}{1+\sin x}$

$p(x)=(\frac{e^{3x}}{1+\sin x})^3$ 中 $\frac{e^{3x}}{1+\sin x}=\frac{e^{2x}}{1+\sin x}e^x\ge\frac{e^{2x}}{1+\sin x}>1$，则 $(\frac{e^{3x}}{1+\sin x})^3\ge(\frac{e^{2x}}{1+\sin x})^2$

综上可得 $I_1<I_2<I_3$.

5.下列级数发散的是（　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$　　C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

【答案】D

【解析】因为 D 选项的 p 级数 $p=\frac{1}{2}\le 1$，所以该级数发散.

非选择题部分

注意事项：

1. 用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上.
2. 在答题纸上作图，可先使用 2B 铅笔，确定后必须使用黑色字迹的签字笔或钢笔描黑.

二、填空题(本大题共 10 小题，每小题 4 分， 共 40 分)

6.极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x+3})^{x}=$__________.

【答案】e^{2}

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x+3})^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x+3})^{\frac{x+3}{2}\cdot\frac{2}{x+3}\cdot x}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{2x}{x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x+3}}=e^{2}$.

7.已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=2$，则极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{\sqrt{1+x}-1}=$__________.

【答案】4

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{\sqrt{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{\frac{1}{2}x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=2f'(0)=4$.

8.函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}y=\cos t\\x=1+t^{2}\end{cases}$ 所确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$__________.

【答案】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\sin t}{2t}$

【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-\sin t}{2t}$.

9.设函数 $f(x)=\begin{cases}\int_{0}^{x}(t^{2}-2t-3)dt, & x\ge0\\x^{2}, & x<0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=$__________处取得极小值.

【答案】3

【解析】当 $x<0$ 时，$f'(x)=2x$，当 $x>0$ 时，$f'(x)=x^{2}-2x-3$.

$f(0)=\int_{0}^{0}(t^{2}-2t-3)dt=0$

$f'_{-}(0)=\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{\int_{0}^{x}(t^{2}-2t-3)dt}{x}=\lim\limits_{x\to0}(x^{2}-2x-3)=-3$，

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{2}}{x}=\lim\limits_{x\to0}x=0$，$f'(0)$ 不存在.

当 $x<0$ 时，$f'(x)=2x<0$；当 $0<x<3$ 时，$f'(x)=x^{2}-2x-3<0$，所以 $x=0$ 不是极值点.

令 $f'(x)=0$ 时，即 $x^{2}-2x-3=0,(x-3)(x+1)=0,x_{1}=3,x_{2}=-1$，

其中 $x=-1$ 舍去，当 $0<x<3$ 时，$f'(x)=x^{2}-2x-3<0$；当 $x>3$ 时，

$f'(x)=x^2-2x-3>0$，得到 $x=3$ 为极小值点.

10.计算定积分 $\int_0^1 x(1-x)^2dx$ ____________.

【答案】$\frac{1}{12}$

【解析】

$\int_0^1 x(1-x)^2dx=\int_0^1 x(x^2-2x+1)dx=\int_0^1(x^3-2x^2+x)dx=(\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{12}$.

11.已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln y-xy^2=1$ 所确定，则 $dy=$ ____________.

【答案】$\frac{y^3}{1-2xy^2}dx$

【解析】两边对 x 求导得 $\frac{1}{y}y'-y^2-2xyy'=0$

整理得 $y'=\frac{y^3}{1-2xy^2}$，所以 $dy=\frac{y^3}{1-2xy^2}dx$.

12.求积分 $\int_0^1\frac{1+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=$ ____________.

【答案】$2+2\sin 1$

【解析】$\int_0^1\frac{1+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1\left(1+\cos\sqrt{x}\right)d\sqrt{x}=2\left(\sqrt{x}+\sin\sqrt{x}\right)\Big|_0^1=2+2\sin 1$.

13.曲线 $y=\frac{x^2+x+1}{3-x}$ 的垂直渐近线是 ____________.

【答案】$x=3$

【解析】$x=3$ 是无定义点，$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x+1}{3-x}=\infty$.

14.已知 $\sin x$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x)dx=$ ____________.

【答案】$x\sin x+\cos x+C$

【解析】由题意得 $f(x)=\cos x$，积分得 $\int xf(x)dx=\int x\cos xdx=\int xd\sin x$

$=x\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x+C$.

15.函数 $y=x^3+e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程 ____________.

【答案】 $y=x+1$

【解析】 $y'=3x^2+e^x$，$k=y'(0)=1$，根据点斜式得：$y=x+1$.

三、计算题(本大题共 8 小题，其中 16—19 小题每小题 7 分，20—23 小题每小题 8 分，共 60 分.计算题必须写出必要的计算过程，只写答案的不给分）

16.计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x\sin x}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

17.设函数 $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$，求 $f'(0)$，$f^{(4)}(0)$.

解：由题意可得 $f(x)=x^4+6x^3+11x^2+6x$，

$f'(x)=4x^3+18x^2+22x+6$，将 $x=0$ 代入得到 $f'(0)=6$，

$f''(x)=12x^2+36x+22$，$f'''(x)=24x+36$，

$f^{(4)}(x)=24$，将 $x=0$ 代入得到 $f^{(4)}(0)=24$.

18.求不定积分 $\int\dfrac{1}{\sqrt{x-5}+1}dx$.

解：令 $\sqrt{x-5}=t$，$x=t^2+5$，$dx=2tdt$

原式 $=\int\dfrac{2t}{t+1}dt=2\int\dfrac{t+1-1}{t+1}dt=2\int(1-\dfrac{1}{t+1})dt=2t-2\ln|1+t|+C$

$=2\sqrt{x-5}-2\ln\left(\sqrt{x-5}+1\right)+C$

19.设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\ge 0\\ -x^2, & x<0\end{cases}$，问 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续?是否可导?请说明理由.

解：因为 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0,\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2)=0$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

又因为 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$

所以 $f'_{-}(0)=f'(0)=0$， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

20.计算定积分 $\int_{-2}^{2}(\frac{\sin^7 x}{1+x^6}+x^2e^{|x|})dx$.

解：原式 $=\int_{-2}^{2}\left(\frac{\sin^7 x}{1+x^6}+x^2e^{|x|}\right)dx=0+2\int_0^2 x^2e^x dx=2x^2e^x\Big|_0^2-2\int_0^2 2xe^x dx=4e^2-4$

21.求过点 $A(2,1,2)$ 且垂直于直线 $\begin{cases}x+y+z=0\\x-2y-z+1=0\end{cases}$ 的平面方程.

解：由题意可得，设平面 $\pi_1:x+y+z=0$，其法向量 $\vec{n_1}=(1,1,1)$

设平面 $\pi_2:x-2y-z+1=0$，其法向量 $\vec{n_2}=(1,-2,-1)$

平面 π_1 和 π_2 的交线为 L， 其方向向量 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=(1,2,-3)$

点法式得：$x+2y-3z+2=0$.

22.求微分方程 $y''-5y'+6y=e^x(x+1)$ 的通解.

解：对应齐次方程的特征方程为：$\lambda^2-5\lambda+6=0$ 得特征根 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=3$

齐次方程的通解为：$Y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

设非齐次特解形式为：$y^*=(ax+b)e^x$

代入由待定系数法整理得：$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{5}{4}$，则 $y^*=\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\right)e^x$

所以非齐次的通解为 $y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\right)e^x$.

23.求函数 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}$ 的单调区间和凹凸区间.

解：定义域：$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$$y'=x^2-\frac{1}{x^2}=\frac{x^4-1}{x^2}=\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{x^2}$$

令 $y'=0$ 得 $x_1=-1$，$x_2=1$

$$y''=2x+2\frac{1}{x^3}=\frac{2x^4+2}{x^3}$$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−	−	0	+
y''	−		−	+		+
y	↗凸	极大值	↘凸	↘凹	极小值	↗凹

单调递增区间为$(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$；单调递减区间为$(-1,0)$，$(0,1)$

凹区间：$(0,+\infty)$；凸区间：$(-\infty,0)$

四、综合题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分.）

24.已知$\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n(|x|<1)$.

（1）求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n+1}$的收敛半径与和函数；

（2）求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n}$的和.

解：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{n+2}}{x^{n+1}}\right|=|x|<1$ 解得$x\in(-1,1)$，故幂级数收敛半径为$R=1$

当$x=-1$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}$发散；当$x=1$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}1^{n+1}$发散，收敛域为$x\in(-1,1)$，

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{x}{1-x}$.

（2）设$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,x\in(-1,1)$，又$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，则

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n}=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2}=4$.

25.曲线$y=\sqrt{x}$与直线$x=t(t>0)$及x轴所围成的平面图形为D，其面积记为S，图形D分别绕x轴，y轴旋转一周所得的几何体体积记为V_1，V_2.

（1）当$t=4$时，计算S的值；

（2）当$V_1=V_2$时，求t值.

解：由题意可得（1）$S=\int_0^4\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{16}{3}$；

（2）$V_1=\pi\int_0^t(\sqrt{x})^2dx=\frac{\pi}{2}t^2, V_2=2\pi\int_0^t x\sqrt{x}dx=\frac{4}{5}\pi t^{\frac{5}{2}}$.

令$V_1=V_2$，即$\frac{\pi}{2}t^2=\frac{4}{5}\pi t^{\frac{5}{2}}$，解得$t=\frac{25}{64}$.

26.已知$g(x)$是闭区间$[-1,1]$上的连续奇函数，且在开区间$(-1,1)$内可导，设函数$f(x)=\int_{-1}^{x}g(t)dt$，证明：

（1）$f'(0)=0$；

（2）至少存在一点$\xi\in(-1,1)$，使得$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$；

（3）至少存在一点$\eta\in(0,1)$，使得$f''(\eta)=g(1)$.

解：（1）由于$g(x)$是$[-1,1]$上的连续奇函数，则$g(x)=-g(-x)$，令$x=0$，得$g(0)=0$.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\int_{-1}^{x}g(t)dt-\int_{-1}^{0}g(t)dt}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x g(t)dt}{x}=\lim_{x\to0}g(x)=g(0)=0$$

（2）构造辅助函数$F(x)=xf(x)$，则$F(x)$在闭区间$[-1,1]$上连续，在$(-1,1)$上可导.又$F(-1)=-f(-1)=-\int_{-1}^{-1}g(t)dt=0, F(1)=f(1)=\int_{-1}^{1}g(t)dt=0$，故由罗尔中值定理可得存在$\xi\in(-1,1)$，使得$F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

（3）$f'(x)=\left(\int_{-1}^{x}g(t)dt\right)'=g(x)$，故$f'(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，由拉格朗日中值定理可得，存在一点$\eta\in(0,1)$，使得$f''(\eta)=g'(\eta)=\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=g(1)$.