



# 浙江省 2021 年选拔优秀高职高专毕业生进入本科学习统一考试

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上：

## 选择题部分

### 注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。
2. 每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。不能答在试题卷上。

一、选择题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求的。

1. 下列结论不正确的是( )  
A.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$       B.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$       C.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$       D.  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = 0$
2. 设抛物线  $y = x^2$ ，则抛物线在点  $M(3,9)$  处的切线方程为( )  
A.  $y - 9 = 6(x - 3)$       B.  $y - 9 = -\frac{1}{6}(x - 3)$       C.  $y - 3 = 6(x - 9)$       D.  $y - 3 = -\frac{1}{6}(x - 9)$
3.  $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$ ,  $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$ , 则( )  
A.  $I_1 < I_2$       B.  $I_1 = I_2$       C.  $I_1 > I_2$       D. 不能比较
4. 下列结论不正确的是( )  
A. 在自变量的同一变化过程中，如果函数  $f(x)$  为无穷大，那么  $\frac{1}{f(x)}$  为无穷小。  
B. 初等函数在其定义域内不一定是连续的  
C. 设  $f(x)$  是连续的周期函数，周期为  $T$ ，则  $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$   
D. 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛，则  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$
5. 已知  $y = f(x)$  为微分方程  $xy' - y = 0$  的解，且  $y|_{x=1} = 4$ ,  $y|_{x=2}$  的值为( )  
A. 0      B. 8      C. 11      D. 32



## 非选择题部分

### 注意事项：

- 用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试卷上。
- 在答题纸上作图，可先使用 2B 铅笔，确定后必须使用黑色字迹的签字笔或钢笔描墨。

### 二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分

6.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 3x - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$

7.  $f'(x_0) = 6, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 3h) - f(x_0)}{h} = \underline{\hspace{2cm}}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^{2021}}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$

9.  $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = e^{2t} + \arctan t \end{cases}, \frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$

10.  $f(x) = 2x - \sqrt{3x}$ , 在  $x \in [3, 12]$  的最小值 =  $\underline{\hspace{2cm}}$

11.  $\int_0^5 (2x + \sqrt{25 - x^2}) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

12.  $y = \frac{2}{3}x^3 - 3x$ , 当  $x = 2, \Delta x = 0.005$ , 求微分  $dy = \underline{\hspace{2cm}}$

13. 已知  $f(x)$  为连续函数,  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ , 且  $F'(1) = 1$ , 则  $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$

14. 平面由  $0 \leq a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)$  所确定, 求该平面绕  $y$  轴旋转得到的图形的体积 =  $\underline{\hspace{2cm}}$

15. 计算瑕积分  $\int_2^9 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

### 三、计算题：本大题共 8 小题，其中 16-19 小题每小题 7 分，20-23 小题每小题 8 分，共 60 分。计算题必须写出必要的计算过程，只写答案的不给分。



16.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin 3x) \arctan 2x}{x^2} =$

17.  $f(x) = x^3 + \ln(x+5)$  在  $x = -3$  处四阶导数  $f^{(4)}(-3) =$

18.  $\int \arctan 5x dx$

19. 已知  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 3x}{2x}, & x > 0 \\ ax + b + \sin x, & x \leq 0 \end{cases}$ , 试求  $a, b$  为何值时,  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导.

20.  $\int_0^1 \left[ \frac{1}{(2x+3)^3} + x^6 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right] dx =$



李钦波

21. 已知  $l_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-2}$ ,  $l_2$  过点  $M(3,2,1)$  且与向量  $\vec{b}(0,2,3)$  平行, 计算  $\vec{l}_1 \times \vec{l}_2$ , 并求直线  $l_1$  与  $l_2$  的距离.

22.  $y'' + 9y = 52e^x \sin 2x$  的通解

23. 求  $y = \frac{2x^2 - 3x - 18}{2x - 3}$  的单调区间和凹凸区间。

四、综合题：本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分。



四、综合题：本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分。

高等数学试题 第 2 页（共 3 页）

24、将函数  $f(x) = e^x$  展开成  $x$  的幂级数，并求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{an^2 + b}{n!} x^n$  的收敛半径及和函数 ( $a, b$  为非零常数)。

25、设抛物线  $y = ax^2 + (4-a)x$ , 其中  $a < 0$ , 记  $D_1$  是抛物线和直线  $y = 0, x = 0, x = 2$  所围成的封闭平面区域, 记  $D_2$  是抛物线与  $y = \frac{5}{2}x$  所围成的封闭平面区域。  
(1)  $a = -2$  时, 求  $D_1$  绕  $x$  轴旋转一周所形成的旋转体的体积。  
(2) 求当  $a$  取何值时, 使得  $D_2$  面积最小。

26、设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 2]$  上具有连续导数,  $f(0) = f(2) = 4, f(1) = 1$ ,  
(1) 证：至少存在一点  $\xi \in (0, 2)$ , 使得  $f'(\xi) = 3$   
(2) 证：至少存在一点  $\eta \in (0, 2)$ , 使得  $f'(\eta) + \eta = 2$



浙江省 2021 年选拔优秀高职高专毕业生进入本科学习统一考试

# 高等数学

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

## 选择题部分

### 注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。
2. 每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。不能答在试题卷上。

一、选择题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求的。

1. 下列结论不正确的是( )

A.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$       B.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$       C.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$       D.  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = 0$

解析：

A. 正确，满足重要极限

B. 正确，满足重要极限

C. 正确，正确无穷小乘有界依旧为无穷小

D. 错误， $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  但  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ，无穷需要讨论

答案：D

2. 设抛物线  $y = x^2$ ，则抛物线在点  $M(3,9)$  处的切线方程为( )

A.  $y - 9 = 6(x - 3)$       B.  $y - 9 = -\frac{1}{6}(x - 3)$       C.  $y - 3 = 6(x - 9)$       D.  $y - 3 = -\frac{1}{6}(x - 9)$

解析： $y' = 2x$ ，又过点  $(3,9)$ ，则此时斜率为 6 所以易知， $y - 9 = 6(x - 3)$

答案：A

3. 记  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ ,  $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$ , 则( )

A.  $I_1 < I_2$       B.  $I_1 = I_2$       C.  $I_1 > I_2$       D. 不能比较

解析：由华里士公式得  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}$ ,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3\pi}{16}$

答案：C



4. 下列结论不正确的是( )

- A. 在自变量的同一变化过程中, 如果函数 $f(x)$ 为无穷大, 那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小.
- B. 初等函数在其定义域内不一定是连续的
- C. 设 $f(x)$ 是连续的周期函数, 周期为 $T$ , 则 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$
- D. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

解析:

- A. 正确若 $f(x)$ 为无穷大, 其倒数便为无穷小
- B. 错误初等函数默认在其定义域内连续且可导
- C. 正确由公式 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ 可得
- D. 正确, 级数收敛的必要条件

答案: B

5. 已知 $y = f(x)$ 为微分方程 $xy' - y = 0$ 的解, 且 $y|_{x=1} = 4, y|_{x=2}$ 的值为( )

- A. 0      B. 8      C. 11      D. 32

解析: 由一阶线性或者可分离变量均可得方程通解为 $y = Cx$

所以代入 $y|_{x=1} = 4$ 得,  $C = 4$ , 后再代入 $x = 4$ 可得

答案: B

## 非选择题部分

### 注意事项:

- 用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上, 不能答在试卷上.
- 在答题纸上作图, 可先使用 2B 铅笔, 确定后必须使用黑色字迹的签字笔或钢笔描墨.

### 二、填空题: 本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分

6.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 3x - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$

解析:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 3x - 1} = \frac{3}{2}$

7.  $f'(x_0) = 6, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 3h) - f(x_0)}{h} = \underline{\hspace{2cm}}$

解析:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 3h) - f(x_0)}{h} = 3f''(x_0) = 18$



8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^{2021}}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$

解析:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^{2021}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2021}}{x} = 0$

9.  $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = e^{2t} + \arctan t \end{cases}, \frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$

解析:  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2e^{2t} + \frac{1}{1+t^2}}{3t^2} = \frac{1+2e^{2t}+2e^{2t}t^2}{3t^4+3t^2}$

10.  $f(x) = 2x - \sqrt{3x}$ , 在  $x \in [3, 12]$  的最小值 =  $\underline{\hspace{2cm}}$

解析:  $f'(x) = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}, x = \frac{3}{16}$  (不在区间内)

$f(3) = 6 - 3 = 3$ ,  $f(12) = 24 - 6 = 18$ , 所以最小值为 3

11.  $\int_0^5 (2x + \sqrt{25-x^2}) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

解析:  $\int_0^5 (2x + \sqrt{25-x^2}) dx = \int_0^5 2xdx - \int_0^5 \sqrt{25-x^2} dx$

$= 25 + \frac{25\pi}{4}$

12.  $y = \frac{2}{3}x^3 - 3x$ , 当  $x = 2$ ,  $\Delta x = 0.005$ , 求微分  $dy = \underline{\hspace{2cm}}$

解析:  $y' = 2x^2 - 3$ ,  $dy = y' dx = y' \Delta x = (2 \cdot 2^2 - 3)0.005 = 0.025$

13. 已知  $f(x)$  为连续函数,  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ , 且  $F'(1) = 6$ , 则  $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$

解析:  $F'(x) = 3x^2 f(x^3)$ ,  $F'(1) = 3f(1) = 6$ , 所以  $f(1) = 2$

14. 平面由  $0 \leq a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)$  所确定, 求该平面绕 y 轴旋转得到的图形的体积 =  $\underline{\hspace{2cm}}$

解析: 由绕 y 旋转的体积公式得  $V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$

15. 计算瑕积分  $\int_2^{29} \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

解析:  $\int_2^{29} \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} dx = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{3}{2} [(x-2)^{\frac{2}{3}}]_{29}^t = \frac{27}{2}$

三、计算题: 本大题共 8 小题, 其中 16-19 小题每小题 7 分, 20-23 小题每小题 8 分, 共 60 分。计算题必须写出必要的计算过程, 只写答案的不给分。



$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin 3x) \arctan 2x}{x^2}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - 3x) 2x}{x^2} = -4$$

17.  $f(x) = x^3 + \ln(x+5)$  在  $x = -3$  处四阶导数  $f^{(4)}(-3) =$

解析:  $f^{(4)}(x) = (-1)^3 \frac{3!}{(x+5)^4}, f^{(4)}(-3) = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8}$



18.  $\int \arctan 5x dx$

解析:  $\int \arctan 5x dx = x \arctan 5x - \int x d(\arctan 5x) = x \arctan 5x - \int \frac{5x}{1+25x^2} dx$   
 $= x \arctan 5x - \frac{1}{10} \int \frac{1}{1+25x^2} d(25x^2 + 1) = x \arctan 5x - \frac{1}{10} \ln(25x^2 + 1) + C$

19. 已知  $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos 3x}{2x}, & x > 0 \\ ax + b + \sin x, & x \leq 0 \end{cases}$ , 试求  $a, b$  为何值时,  $f(x)$  在  $x=0$  处可导.

解析:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos 3x}{2x} = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ax + b + \sin x$ , 得  $b = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$  得  $a = \frac{5}{4}$

20.  $\int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{(2x+3)^3} + x^6 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right] dx =$

解析: 因为  $x^6 \ln(x + \sqrt{1+x^2})$  为奇函数

则  $\int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{(2x+3)^3} + x^6 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right] dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{(2x+3)^3} dx$

$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{(2x+3)^3} d(2x+3) = -\frac{1}{4} [(2x+3)^{-2}]_{-1}^1 = \frac{6}{25}$

21. 已知  $l_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-2}$ ,  $l_2$  过点  $M(3,2,1)$  且与向量  $\vec{b}(0,2,3)$  平行, 计算  $\vec{l}_1 \times \vec{l}_2$ , 并求直线  $l_1$  与  $l_2$  的距离.

解析: 易知  $l_1: \frac{x-3}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$ , 那么  $\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 9\vec{j} + 6\vec{k}$

结合点  $M$  得面:  $7(x-3) - 9(y-2) + 6(z-1) = 0$ , 得  $7(x-3) - 9(y-2) + 6(z-1) = 0$

$7x - 9y + 6z - 9 = 0$ ,  $d = \frac{|-14 - 27 - 9|}{\sqrt{7^2 + 9^2 + 6^2}} = \frac{50}{\sqrt{166}}$

22.  $y'' + 9y = 52e^x \sin 2x$  的通解.

解:  $r^2 + 9 = 0$  推得  $r = \pm 3i$

$y$  齐次通解  $= C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

$y' = x^0 e^x (a \cos 2x + b \sin 2x)$  将  $y'$  带入方程得

$y' = e^x (-4 \cos 2x + 6 \sin 2x)$

$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + e^x (-4 \cos 2x + 6 \sin 2x)$



23、求 $y=\frac{2x^2-3x-18}{2x-3}$ 的单调区间和凹凸区间。

解析：

$$y=\frac{2x^2-3x-18}{2x-3}=1-\frac{16}{2x-3}, y'=\frac{(2x-7)(2x+1)}{(2x-3)^2}$$

$y''=\frac{64}{(2x-3)^3}$ , 则单调增区间为 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ ,  $(\frac{7}{2}, +\infty)$ ; 单调减区间为 $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ ; 凸区间为 $(-\infty, \frac{3}{2})$ , 凹区间为 $(\frac{3}{2}, +\infty)$

四、综合题：本大题共3小题，每小题10分，共30分。

24、将函数 $f(x)=e^x$ 展开成 $x$ 的幂级数，并求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{an^2+b}{n!} x^n$ 的收敛半径及和函数( $a, b$ 为非零常数)。

$$\text{解析: } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{a(n+1)^2+b}{(n+1)!}}{\frac{an^2+b}{n!}} \right| = 0, \text{ 则半径为 } +\infty, \text{ 收敛域 } (-\infty, +\infty)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{an^2+b}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{an^2}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{bx^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an^2}{n!} x^n + be^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an}{(n-1)!} x^n + be^x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(n+1)}{n!} x^{n+1} + be^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{an}{n!} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ax^{n+1}}{n!} + be^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{an}{n!} x^{n+1} + (ax+b)e^x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{n!} x^{n+1} + (ax+b)e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{n!} x^{n+2} + (ax+b)e^x = (ax^2+ax+b)e^x \end{aligned}$$

25、设抛物线 $y=ax^2+(4-a)x$ , 其中 $a<0$ , 记 $D_1$ 是抛物线和直线 $y=0, x=0, x=2$ 所围成的封闭平面区域, 记 $D_2$ 是抛物线与 $y=\frac{5}{2}x$ 所围成的封闭平面区域。

(1)  $a=-2$ 时, 求 $D_1$ 绕 $x$ 轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

(2) 求当 $a$ 取何值时, 使得 $D_2$ 面积最小。

(1) 当 $a=-2$ 时,  $y=-2x^2+6x$ , 设体积 $V=\pi \int_0^2 (-2x^2+6x)^2 dx = \frac{128\pi}{5}$

(2) 令抛物线和直线相交得 $S(a)=\int_0^{\frac{3-a}{2}} ax^2+(4-a)x-\frac{5}{2}x dx = -\frac{(a-\frac{3}{2})^3}{6a^2}$ , ( $a<0$ )

$S'(a)=-\frac{1}{24a^3}(a+3)(2a-3)^2$ , 所以易知 $a=-3$ 时, 面积最小



26、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上具有连续导数， $f(0)=f(2)=4, f'(1)=1$ 。

(1)证：至少存在一点 $\xi \in (1,2)$ , 使得 $f'(\xi)=3$

(2)证：至少存在一点 $\eta \in (0,2)$ , 使得 $f'(\eta)+\eta=2$

(1)证：令 $F(x)=f(x)-3x$

$F(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 上连续

$$F(1)=f(1)-3=-2$$

$$F(2)=f(2)-6=-2$$

$$F(1)F(2)<0$$

由罗尔定理可知

至少存在一点 $\xi \in (1,2)$ , 使得 $f'(\xi)=3$

(2)设 $G(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2-2x$

$G(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 可导

$$G(0)=f(0)=4$$

$$G(1)=-\frac{1}{2}$$

$$G(2)=2$$

由零点定理，存在 $\xi_1 \in (0,1)$ ,  $f'(\xi_1)=0$

同理存在 $\xi_2 \in (1,2)$ ,  $f'(\xi_2)=0$

由罗尔定理可知

至少存在一点 $\eta \in (0,2)$ , 使得 $f'(\eta)+\eta=2$