2016 年浙江专升本高等数学考试真题及答案

选择题部分

注意事项：

1.答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

2.每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。不能答在试题卷上。

一、选择题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.设 $f(x)=[x]-x$，则 $f(x)$ 为（　　）

A 有界函数　　B 偶函数　　C 奇函数　　D 周期函数

2.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x_0)=0, x_0\in(a,b)$，则（　　）

A $f(x_0)$ 为函数的极值　　B $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续

C $f(x)$ 为 $x=x_0$ 处可微　　D $(x_0, f(x_0))$ 为函数的拐点

3.设 $f'(1)=3, f(1)=2f(0)=1$，则 $\int_0^1 xf''(x)dx=$（　　）

A 2　　B 3

C 0　　D 1

4.若实数 $0<b<a$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$ 的收敛半径为（　　）

A a　　B b

C a+b　　D b-a

5.微分方程 $y''+y'+y=x\sin x$，则其特解形式为（　　）

A $x(a\sin x+b\cos x)$　　B $x[(ax+b)\sin x+(cx+d)\cos x]$

C $(ax+b)\sin x+(cx+d)\cos x$　　D $(ax+b)\sin x+(c\sin x+d\cos x)$

非选择题部分

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

6.极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=$______.

7.函数 $f(x)=\ln(x^2-1)$ 的定义域为______.

8.若 $f'(1)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{x-1}=$______.

9.若 $y=y(x)$ 为方程 $\sin y+xe^y+2x=0$ 所确定的隐函数，则 $dy=$______

10. $\int x\ln x dx=$______.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dots+\dfrac{1}{n+n}\right)=$______.

12.由 $y=\sin x(0\le x\le\pi)$ 与 x 轴所围的平面图形的面积为______.

13. $y''+3y'+2y=0$ 的通解为______.

14.在 xoy 平面上，设 $\vec{a}=(-1,-3,6),\vec{b}=(4,-3,0)$, 则 $\vec{a}\times\vec{b}=$______.

15.与平面 $2x+y-z+3=0$ 距离为 $\sqrt{6}$ 的平面方程为______.

三、计算题：本题共有 8 小题，其中 16-19 小题每小题 7 分，20-23 小题每小题 8 分，共 60 分。计算题必须写出必要的计算过程，只写答案的不给分。

16.设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1-x-ax^2}{x^2}, x\ne 0\\ 1, x=0\end{cases}$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，求 a.

17.设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2x+1}, x\le 0\\ \ln(1+x), x>0\end{cases}$，求 $f'(x)$.

18.求函数 $f(x)=\dfrac{-7x+6}{-x^2+3x-2}$ 的拐点与凹凸区间.

19.求 $x^2y''+3xy'+y=0$ 的通解.

20.计算 $\int x\cos 2x dx$.

21.计算 $\int_3^5 \dfrac{1}{x^2-3x+2}dx$.

22.计算定积分 $\int_{-1}^{1}|x|\sqrt{1-x^2}dx$.

23.将 $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ 展开成 x 的幂级数，并指出其收敛域.

四、综合题：本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分。

24.已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$，求 $f(x)$

25.证明：当 $x>0$ 时，$\cos x>1-\frac{x^2}{2}$

26.设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可微，且有 $f(0)=\int_1^2 f(x)dx$，求证：存在一点 $\xi\in[0,2]$，使得 $f'(\xi)=0$

2016 年浙江专升本高等数学考试真题答案

1、A

解析：$x-1<[x]\le x,$ 所以 $-1<[x]-x\le 0$，有界

2、C

解析：根据题意可知，$f'(x_0)=0$，即 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可微（与可导等价）

3、A

解析：

$$\int_0^1 xf''(x)dx=\int_0^1 xdf'(x)=xf'(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)dx=f'(1)-f(x)\Big|_0^1$$

$$=f'(1)-f(1)+f(0)=3-2+1=2$$

4、A

解析：求幂级数收敛半径 R，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a^n+b^n}}{\frac{1}{a^{n+1}+b^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{\frac{1}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^n\bullet\frac{1}{a}}=a,(a>b>0)$$

5、C

解析：根据给出的 $f(x)$ 可知属于 $f(x)=e^{\lambda x}[P_n(x)\cos\omega x+Q_m(x)\sin\omega x]$ 类型，而 $\lambda+\omega i$ 不是特征方程的根，故 $k=0$，且 $s=1$，故方程的特解形式可设为：

$$y^*=(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x$$

6、$\frac{1}{2}$

解析：有理化，$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

7、$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

解析：由对数函数的真数要大于零可知 $x^2-1>0$，解得 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

8、-4

解析：$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}=-2\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}=-2f'(1)-4$$

9、 $dy=-\dfrac{2+e^{y}}{\cos y+xe^{y}}dx$

解析：隐函数求导，$\sin y+xe^{y}+2x=0$，两边关于x求导得，(答案和解析不一致)

$$\cos y\cdot y'+e^{y}+xe^{y}y'+2=0,\quad y'=-\frac{2+e^{y}}{\cos y+xe^{y}},dy=-\frac{2+e^{y}}{\cos y+xe^{y}}dx$$

10、 $\frac{1}{2}x^{2}\ln x-\frac{1}{4}x^{2}+C$

解析： 分部积分

$$\int x\ln xdx=\frac{1}{2}\int\ln xdx^{2}=\frac{1}{2}x^{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x^{2}d\ln x=\frac{1}{2}x^{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{1}{2}x^{2}\ln x-\frac{1}{4}x^{2}+C$$

11、$\ln 2$

解析：利用定积分定义求极限（等分分割）

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\bullet\frac{1}{n}=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_{0}^{1}=\ln 2$$

12、2

解析：

$$\int_{0}^{\pi}\sin xdx=(-\cos x)\Big|_{0}^{\pi}=2$$

13、 $y=C_{1}e^{-x}+C_{2}e^{-2x}$

解析： $r^{2}+3r+2=0,(r+1)(r+2)=0,r_{1}=-1,r_{2}-2$

通解为$y=C_{1}e^{-x}+C_{2}e^{-2x}$

14、$(18,24,15)$

解析：

$$\begin{vmatrix}i & j & k\\ -1 & -3 & 6\\ 4 & -3 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 6\\ -3 & 0\end{vmatrix}i-\begin{vmatrix}-1 & 6\\ 4 & 0\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 4 & -3\end{vmatrix}k=18i+24j+15k$$

15、 $2x+y-z+9=0$和$2x+y-z-3=0$

解析：据题意两平面平行，设所求平面方程为$2x+y-z+D=0$，

则在已知平面$2x+y-z+3=0$取点$p(0,0,3)$，由点到平面距离公式可知

$$d=\frac{|-3+D|}{\sqrt{2^{2}+1^{2}+(-1)^{2}}}=\sqrt{6}$$

可得 D=9 和 D=-3.故所求平面方程为$2x+y-z+9=0$和$2x+y-z-3=0$

16、$a=-\frac{1}{2}$

解析：$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1-x-ax^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1-x}{x^2}-a$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{2x}-a=\frac{1}{2}-a$，　　……5 分

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+1)=1$，由 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 可得 $a=-\frac{1}{2}$　　……7 分

17、

解析：当 $x>0$ 时，　　……2 分

$$f'(x)=\frac{1}{(2x+1)^2}$$

当 $x<0$ 时，　　……3 分

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{2x+1}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2x+1}=1$$

所以 $f'(0)=1$　　……6 分

所以　　……7 分

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(2x+1)^2}, x\ge 0\\ \frac{1}{1+x}, x<0\end{cases}$$

18、凹区间：（0,1），（1,2），（2，$+\infty$）；凸区间（$-\infty$，0）拐点（0，-3）

解析：定义域（$-\infty$，1）$\cup$（1,2）$\cup$（2，$+\infty$）

$$y=\frac{7x-6}{x^2-3x+2}=\frac{7x-6}{(x-1)(x-2)}=\frac{8}{x-2}-\frac{1}{x-1}$$

$y'=-\frac{8}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}$，　　……2 分

$$y''=\frac{16}{(x-2)^3}-\frac{2}{(x-1)^3}=\frac{2x(7x^2-18x+12)}{(x-2)^3(x-1)^3}$$

$$7x^2-18x+12>0(\Delta=(-18)^2-28*12<0)$$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$
y''	$-$	0	+ + +
y	凸	拐点 -3	凹 凹 凹

19、$\dfrac{c_1+c_2\ln x}{x}$ 解析：①湊 $y=x^n$，代入上式，$n(n-1)x^n+3nx^n+x^n=0$

$n(n-1)+3n+1=0, n^2+2n+1=0, n=-1$，故 $y=\dfrac{1}{x}$ 为特解。

②（常数变异）$y=\dfrac{u}{x}$ 代入上式，$y'=\dfrac{u'x-u}{x^2}, y''=\dfrac{u''x^2-2u'x+2u}{x^3}$，

得 $u''x+u'=0, u=\ln x$，故 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 为特解。综上所知，原方程通解为 $\dfrac{c_1+c_2\ln x}{x}$

20、$\dfrac{1}{2}x\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$ 解析：

$$\int x\cos 2x dx=\frac{1}{2}\int x(\sin 2x)' dx=\frac{1}{2}(x\sin 2x-\int \sin 2x dx)=\frac{1}{2}(x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x)+C$$

21、解析：

$$\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx=\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx=\int (\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1})dx=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|=\ln 3-\ln 2$$

22、$\dfrac{2}{3}$ 解析：$\int_{-1}^{1}|x|\sqrt{1-x^2}dx=2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx=-\int_0^1\sqrt{1-x^2}d(1-x^2)=-\dfrac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\dfrac{2}{3}$

23、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1}, x\in(-1,1)$ 解析：

$$\frac{1}{(1+x)^2}=-(\frac{1}{1+x})'=-(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}x^n\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1}, x\in(-1,1).$$

24、$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=\begin{cases}-1, |x|<1\\ 1, |x|>1\\ 0, |x|=1\end{cases}$

解析：（I）当$|x|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=0, f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=-1$; ......3 分

（II）当$|x|>1$时，$\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2n}=\infty, f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=1$; ......7 分

（III）当$|x|>1$时，$f(1)=0, f(-1)=0$ ......9 分

所以 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=\begin{cases}-1, |x|<1\\ 1, \ |x|>1\\ 0, \ |x|=1\end{cases}$ ......10 分

25、解析：令 $F(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}, x\in[0,+\infty)$，

$F'(x)=-\sin x+x \quad F''(x)=-\cos x+1\geq 0$，则 $F'(x)\nearrow$，

所以当 x>0 时，$F'(x)\geq F'(0)=0$，

由 $F'(x)\geq 0$，得 $F(x)\nearrow$，$F(x)\geq F(0)=0$，故 $F(x)>0, x\in[0,+\infty)$

所以当 x>0 时，$\cos x>1-\frac{x^2}{2}, x\in[0,+\infty)$

26、解析：$f(0)=\int_1^2 f(x)dx=f(\eta)\cdot(2-1)$（积分中值定理），$f(x)$满足：

①在$[0,\eta](\subset[0,2])$可导 ②在$[0,\eta](\subset[0,2])$连续 ③$f(0)=f(\eta)$

故由罗尔中值定理得，存在$\xi\in(0,\eta)(\subset[0,2])$，使得 $f'(\xi)=0$