



2015 年浙江专升本高等数学考试真题

选择题部分

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名、准考证用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。
2. 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题纸上对应题号的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案的标号。不能答在试卷上, 浙江升本教育考试。

一、选择题: 本大题共 5 小题, 每题 4 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) - g(x)$ 是 $g(x)$ 的 ()

- A 等价无穷小 B 同阶无穷小
C 高阶无穷小 D 低阶无穷小

2. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x}$ 等于 ()

- A $f'(a)$ B $2f'(a)$ C 0 D $f''(2a)$

3. 设可导函数 $F(x)$ 满足 $F'(x) = f(x)$, 且 C 为任意常数, 则 ()

- A $\int F'(x) dx = f(x) + C$ B $\int f(x) dx = F(x) + C$
C $\int F(x) dx = F(x) + C$ D $\int f'(x) dx = F(x) + C$

4. 设直线 $L_1 = \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+3}{2}$ 与 $L_2 = \begin{cases} x-z=1 \\ y+2z=3 \end{cases}$, 则 L_1 与 L_2 的夹角是 ()

- A $\frac{\pi}{6}$ B $\frac{\pi}{4}$ C $\frac{\pi}{3}$ D $\frac{\pi}{2}$

5. 在下列级数中, 发散的是 ()

- A $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)}$ B $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$
C $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3^n}$ D $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$



非选择题部分

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共计 40 分。

6. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n[\ln(n+1) - \ln n] = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} + ax+b \right) = 2$ 则 a 和 b 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

8. 函数 $f(x) = \int_1^x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt$ ($x > 0$) 的单调减区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}, & -2 < x < 0 \\ a, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则必有 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设 $y = \ln(1+2^x)$ ，则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 若 $f'(x) = |x|$ ，且 $f(-2) = 1$ ，则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. $\int \frac{1}{1+e^x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 函数 $\ln x$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开式为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 直线 $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-2} = z$ 与平面 $x+2y+2z=5$ 的交点坐标是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题：本大题共 8 小题，其中 16-19 小题每小题 7 分，20-23 小题每题 8 分，共 60 分。计算题必须写出必要的计算过程，只写答案的不给分。

16. 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^4+1}$ ($x \neq 0$)，求 $f(x)$.

17. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right)$



18. 设 $y = \cos[f(x)]$, 其中 f 具有二阶导数, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$

19. 已知曲线 $y = x^2 + ax + b$ 与 $2y = xy^3 - 1$ 在点 $(1, -1)$ 处有公切线, 求常数 a, b 的值.

20. 讨论方程 $\ln x = ax (a > 0)$ 有几个实根.

21. 求 $\int \frac{1 + \sqrt{x}}{x + x^2} dx$.

22. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx$.



23. 求曲线 $(x-b)^2 + y^2 = a^2$ ($b > a > 0$) 所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体体积

四、综合题：本大题共 3 小题，每小题 10 分，共计 30 分。

24. 已知函数 $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ 求

- (1). 函数的单调区间及极值；
- (2). 函数图形的凹凸区间及拐点；
- (3). 函数图形的渐近线.

25. 已知 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 计算

(1), $S_0 = \int_0^2 f(x)e^{-x} dx$

(2), $S_0 = \int_0^{2n+2} f(x-2n)e^{-x} dx$

26. 设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$ 为连续函数, 试求 $f(x)$.



2015 年浙江专升本高等数学考试真题答案

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. B 2. B 3. B 4. C 5. D

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

6. -1

7. -1, 3

8. (0, 1)

9. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. $-\frac{\ln 2}{2^x + 1} dx$

11. $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + 3, x \geq 0, \\ -\frac{x^2}{2} + 3, x < 0. \end{cases}$

12. $x - \ln(1 + e^x) + C$

13. $\frac{\pi^2}{8}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n, (0 < x \leq 2)$

15. (1, 1, 1)

三、计算题（本大题共 8 小题，其中 16-19 小题每小题 7 分，20-23 小题每
小题 8 分，共 60 分）

16. 解：因为 $f(x + \frac{1}{x}) = \frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{(x + \frac{1}{x})^2 - 2}$ ； 5 分

所以 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}, |x| \geq 2$ 7 分



17. 解: 令 $t = \frac{1}{x}$,

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(1 - \cos \frac{1}{x}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^2}(1 - \cos t) \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

18. 解: $\frac{dy}{dx} = -2x \sin[f(x^2)] f'(x^2); \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -4x^2[f'(x^2)]^2 \cos[f(x^2)] - 4x^2 f''(x^2) \sin[f(x^2)] - 2f''(x^2) \sin[f(x^2)]$

$\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

19. 解: 因为曲线 $y = x^2 + ax + b$ 在点 $(1, -1)$ 切线的斜率是 $2 + a$,

曲线 $2y = xy^3 - 1$ 在点 $(1, -1)$ 切线的斜率是 $-1 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

所以 $2 + a = -1$, 即 $a = -1$.

又因为 $-1 = 1 + a + b$, 所以 $b = -1 \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

20. 解: 设 $f(x) = \ln x - ax (x > 0)$,

因为 $f'(x) = \frac{1}{x} - a$,

所以当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增.

当 $x > \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减.

$f(x)$ 在 $x = \frac{1}{a}$ 处取得极大值 $f(\frac{1}{a}) = -\ln a - 1 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

又因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$,

所以当 $-\ln a - 1 > 0$, 即 $0 < a < \frac{1}{e}$, 函数 $f(x)$ 有两个零点, 即原方程有两个实根;

当 $-\ln a - 1 = 0$, 即 $a = \frac{1}{e}$, 函数 $f(x)$ 有一个零点, 即原方程有一个实根;

当 $-\ln a - 1 < 0$, 即 $a > \frac{1}{e}$, 函数 $f(x)$ 无零点, 即原方程无实根. $\dots\dots 8 \text{ 分}$



21. 解: 原式 = $\int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x} \right) dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{x} dx$ 6 分

$= \arctan x + \ln|x| + C$ 8 分

22. 解: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin x - \cos x| dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx$ 3 分

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx$

$= 2(\sqrt{2} - 1)$ 8 分

23. 解析: 由题设, 令 $x_1(y) = b + \sqrt{a^2 - y^2}$, $x_2(y) = b - \sqrt{a^2 - y^2}$,

故 $V = 2 \left[\int_0^a \pi x_1^2 dy - \int_0^a \pi x_2^2 dy \right]$ 4 分

$= 2 \left[\int_0^a \pi (b + \sqrt{a^2 - y^2})^2 dy - \int_0^a \pi (b - \sqrt{a^2 - y^2})^2 dy \right]$

$= 8b\pi \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} dy$

$= 2ba^2\pi$ 8 分

四、综合题 (本题共有 3 小题, 每小题 10 分, 共 30 分)

24. 解: (1) 因为 $y' = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$,

由 $y' > 0$, 得 $x > 3$ 或 $x < 1$, 所以函数的单调递增区间是 $(3, +\infty) \cup (-\infty, 1)$;

由 $y' < 0$, 得 $1 < x < 3$, 所以函数的单调递减区间是 $(1, 3)$.

函数在 $x = 3$ 处取得极小值 $\frac{27}{4}$ 4 分

(2) 因为 $y'' = \frac{6x}{(x-1)^3}$,

由 $y'' > 0$, 得 $x > 0$, 所以函数图形的凹区间是 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$;

由 $y'' < 0$, 得 $x < 0$, 所以函数图形的凸区间是 $(-\infty, 0)$;



函数图形的拐点是 $(0,0)$ 8 分

(3) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} (x) \frac{x^2}{(x-1)^2} = \infty$, 所以函数图形的垂直渐近线是 $x=1$.

因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y'(x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - x) = 2$,

所以函数图形有斜渐近线 $y = x + 2$ 10 分

$$\begin{aligned} 25. \text{解: (1)} \quad S_0 &= \int_0^2 f(x)e^{-x} dx \\ &= \int_0^1 xe^{-x} dx + \int_1^2 (2-x)e^{-x} dx \\ &= (e^{-1} - 1)^2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 令 $t = x - 2n$, 则

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{2n}^{2n+2} f(x-2n)e^{-x} dx \\ &= \int_0^2 f(t)e^{-t-2n} dt = e^{-2n} \int_0^2 f(t)e^{-t} dt \\ &= e^{-2n} S_0 = (e^{-1} - 1)^2 e^{-2n}. \end{aligned}$$

26. 解: 对方程两边关于 x 求导得:

$$f'(x) = \cos x - \left[x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt \right]' = \cos x - \int_0^x f(t) dt,$$

再对 x 求导可得:

$$f''(x) + f(x) = -\sin x. \quad \textcircled{1} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

所对应的齐次方程的通解为

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

可设方程①的特解为

$$f(x)^* = x[a \cos x + b \sin x]$$

$$\text{代入①得: } a = \frac{1}{2}, b = 0,$$

所以方程①的通解为

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \cos x. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

又因为 $f(0) = 0, f'(0) = 1$,

$$\text{所以 } C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{2},$$

$$\text{因此 } f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} x \cos x. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$