



重庆市 2022 年普通高校“专升本”统一选拔考试高等数学真题

一、选择题：

1. 函数 $f(x) = \begin{cases} x+a, & x < 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \end{cases}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 求 $a = ()$

A.-1 B.0 C.1 D.2

【答案】C

【解析】本题考查极限存在的充要条件, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+a) = a$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 由 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 故 $a = 1$, 故选 C.

2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $u_n \neq 0 (n=1, 2, 3, \dots)$, 前 n 项和为 S , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ ()

A. 发散 B. 收敛, 但前 n 项和为 S

C. 收敛, 但前 n 项和为 $\frac{1}{S}$ D. 可能收敛, 可能发散

【答案】A



【解析】本题考察级数收敛的必要条件，由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = \infty \neq 0$ ，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ 发

散，故选 A.

3. 已知向量 $a=2i-j+2k$ ， $b=i+2j+2k$ ，则 $(a,b)=()$

A. 0 B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. π

【答案】B

【解析】本题考察向量的夹角，由题意可知 $a=(2,-1,2)$ ， $b=(-1,2,2)$ ，则 $a \cdot b = -2 - 2 + 4 = 0$ ，故 $a \perp b$ ，

则 $(a,b) = \frac{\pi}{2}$ ，故选 B.

4. 已知 $\int f(x) dx = e^{-x^2} + C$ ，则 $f(x) = ()$

A. xe^{-x^2} B. $-xe^{-x^2}$ C. $2e^{-x^2}$ D. $-2e^{-x^2}$

【答案】D

【解析】本题考察不定积分的概念与性质，由 $\int f(x) dx = e^{-x^2} + C$ ，则 $f(x) = (e^{-x^2} + C)' = -2xe^{-x^2}$ ，即

$f(x) = -2e^{-x^2}$ ，故选 D.

5. 微分方程 $y' = 2y$ 的通解为 $()$



- A. $y = e^{2x}$ B. $y = Ce^{2x}$ C. $y = e^{2x} + C$ D. $y = 2e^x + C$

【答案】B

【解析】本题考察一阶微分方程的一阶线性微分方程，由题意可知 $y' - 2y = 0$ ， $P(x) = -2$ ， $Q(x) = 0$ ，则

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} = Ce^{\int 2dx} = Ce^{2x}，\text{ 故选 B.}$$

6. $x=1$ 是 $y=2x^3-6x+1$ 的 ()

- A. 极大值点 B. 极小值点 C. 拐点 D. 最小值点

【答案】B

【解析】本题考察极值点的判定， $y' = 6x^2 - 6$ ， $y'' = 12x$ ， $y''|_{x=1} = 12 > 0$ ，由极值存在的第二充分条件

可知当 $x=1$ 时 y 取得极小值，故选 B.

7. A 为三阶方阵，且 A' 为 A 的伴随矩阵， $|A| = 2$ ，则 $|A'| = ()$

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

【答案】C

【解析】本题考察伴随矩阵与方阵的行列式，由 $A^{-1} = \frac{A'}{|A|}$ 可知 $A' = |A|A^{-1}$ ，

$$\text{则 } |A'| = |A| |A^{-1}| = |A|^3 \cdot |A^{-1}| = |A|^2 = 2^2 = 4，\text{ 故选 C.}$$



8. 若 $P(A)=P(B)=\frac{1}{3}$, $P(AB)=\frac{1}{6}$, 则 A、B 恰有一个发生的概率为()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

【答案】 B

【解析】 本题考察随机事件之间的关系,

$$\begin{aligned} \text{由题意可知 } P(\overline{A}\overline{B} \cup \overline{A}B) &= P(\overline{A}\overline{B}) + P(\overline{A}B) - P(\overline{A}\overline{B}AB) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \text{ 故选 B.} \end{aligned}$$

二、填空题：

9. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \ln(1+x)}$ = _____

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 本题考察等价无穷小量的替换, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$.

10. 已知 $y = \sin(2x+5)$, 求 $dy =$ _____



【答案】 $2\cos(2x+5)dx$

【解析】 本题考察一元函数的微分， $y' = 2\cos(2x+5)$ ， 则 $dy = 2\cos(2x+5)dx$.

11.已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, 且 $|AB| = 8$, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$

【答案】 0

【解析】 本题考察方阵的行列式， $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & a \end{vmatrix} = 3a+4$, $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $|AB| = |A| \cdot |B| = 2(3a+4)$,

由 $|AB| = 8$ 可知 $2(3a+4) = 8$, 即 $a = 0$.

12.从 0~9 的整数中任意取 2 个数 ,求两数之和大于 10 的概率为_____。

【答案】 $\frac{8}{9}$

【解析】 本题考察古典概率， 记 $A = \{\text{两数之和大于 } 10\}$, 则任取两数的取法有 $A_{10}^2 = 10 \times 9 = 90$ 种， 两数

之和小于 10 的取法有 10 种， 分别为 0 和 1、0 和 2、0 和 3、0 和 4、0 和 5、0 和 6、0 和 7、0 和 8、0 和

9、1 和 0， 即 $P(\bar{A}) = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$, 故 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

三、计算题：



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}.$$

13. 计算极限

【解析】 本题考察洛必达法则，

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1.$$

14. 已知 $y=f(x)$ 是过原点的曲线，过原点的切线与直线 $y+2x+5=0$ 平行， $y=f(x)$ 满足 $y'' - 2y' + y = 0$ ，求曲线 $y=f(x)$ 的方程。

【解析】 本题考察二阶微分方程求特解，特征方程 $r^2 - 2r + 1 = 0$ ，解得特征根 $r = 1$ ，

通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x = (C_1 + C_2 x)e^x$ ， $y' = C_2 e^x + (C_1 + C_2 x)e^x$ ，又由 $y=f(x)$ 过原点，和过原点的

切线与直线 $y + 2x + 5 = 0$ 平行，可知 $y(0) = 0$ ， $y'(0) = -2$ ，则 $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 + C_1 = -2 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -2 \end{cases}$ ，所以曲线

为 $y = -2xe^x$ 。

15. 计算定积分 $\int_0^2 \max\{x, x^2\} dx$ 。

【解析】 本题考察 $\max$ 函数与定积分，

$$\int_0^2 \max\{x, x^2\} dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{17}{6}.$$

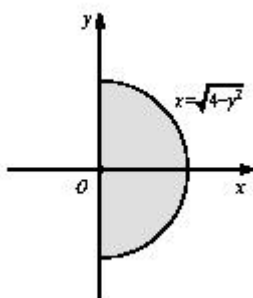


16. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} x^n$ 的收敛域。

【解析】 本题考察幂级数的收敛域， $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n+1} \right| = \frac{1}{3}$ ， 则收敛半径 $r = 3$ ， 当 $x = -3$

时， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)$ 级数发散， 当 $x = 3$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)$ 级数发散， 故幂级数的收敛域为 $(-3, 3)$ 。

17. 计算二重积分 $\iint_D xy^2 dx dy$ ， 其中 D 为由 $x = \sqrt{4-y^2}$ 与 y 轴所围成。



【解析】 本题考察极坐标系下的二重积分， 积分区域如图

$$\iint_D xy^2 dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r \cos \theta \cdot r^2 \sin^2 \theta \cdot r dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{32}{5} \cos \theta \cdot \sin^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{32}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d \cos \theta = \frac{32}{5} \cdot \frac{1}{3} \sin^3 \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{64}{15}.$$



18.某单位要建造一个表面积为 48m^2 的游泳池, 求长、宽、高各为多少时泳池容积最大。

【解析】 本题考察二元函数的条件极值, 设游泳池的长、宽、高分别为 x 、 y 、 z , 则条件函数为

$$\varphi(x, y, z) = xy + 2yz + 2xz - 48 = 0, \text{ 目标函数为 } V = xyz,$$

构造拉格朗日函数 $L(x, y, z) = xyz + \lambda(xy + 2yz + 2xz - 48)$

$$\begin{cases} L'_x(x, y, z) = yz + \lambda(y + 2z) = 0 \\ L'_y(x, y, z) = xz + \lambda(x + 2z) = 0 \\ L'_z(x, y, z) = xy + \lambda(2x + 2y) = 0 \\ xy + 2yz + 2xz - 48 = 0 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

当游泳池的长、宽、高分别为 4m , 4m , 2m 时泳池容积最大。

19.已知 $AX = A + 2X$, 且 $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, 求 X 。



【解析】 本题考察矩阵方程，由 $AX = A + 2X$ ，则 $(A - 2E)X = A$ ， $A - 2E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$|A - 2E| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \text{ 所以 } A - 2E \text{ 可逆, 所以 } X = (A - 2E)^{-1}A$$

$$(A - 2E|A) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1+2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3+r_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_3+2r_2 \\ r_2 \times (-1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 3 \end{array} \right]$$

$$\text{所以 } X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

20. 求线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases}$$
 的通解。



【解析】 本题考察非齐次线性方程组的解，

$$\begin{aligned}
 (A|b) &= \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_2+(-2r_1) \\ r_3-r_1 \\ r_4+(-2r_1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & -2 & 4 & -12 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & -12 \\ 0 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2 \times (-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_1+(-3r_2) \\ r_3+5r_2 \\ r_4+3r_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -11 & 22 \\ 0 & 0 & -11 & 22 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{\substack{r_4-r_3 \\ r_3 \times (-1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_1+(-7r_3) \\ r_2+2r_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 \text{解为} &\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

四、证明题：

21. 证明方程 $x^3 + 3x^2 - 7x = 2$ 有且仅有一个大于 1 的根。

【证明】 本题考察零点定理与单调性，

设 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 7x - 2$ ，由题意可知 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续，不妨取 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续，则有

$$f(1) = 1 + 3 - 7 - 2 = -5 < 0, \quad f(2) = 2^3 + 3 \times 2^2 - 7 \times 2 - 2 = 28 > 0$$

由零点定理可知，至少存在一点 $\xi \in (1, 2)$ 使得 $f(\xi) = 0$ 。

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 7$ ，当 $x \in [1, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0$ 即 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增

所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有且仅有一根 ξ ，即方程 $x^3 + 3x^2 - 7x = 2$ 有且仅有一个大于 1 的根。