2021 年江苏专转本高等数学考试真题及答案

2021 年江苏专转本考试高等数学真题及解答

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1.将 $x\to 0$ 时的无穷小 $\alpha(x)=1-\cos x^2,\beta(x)=e^{x^2}-1,\gamma(x)=x\tan^2 x$ 排列起来，使排在后面的一个是前面一个的高阶无穷小，则正确的排序是

$A.\alpha(x),\gamma(x),\beta(x)$　$B.\beta(x),\gamma(x),\alpha(x)$

$C.\beta(x),\alpha(x),\gamma(x)$　$D.\gamma(x),\beta(x),\alpha(x)$

【解答】

$$\alpha(x)=1-\cos x^2\sim\frac{x^4}{2},$$
$$\beta(x)=e^{x^2}-1\sim x^2,$$
$$\gamma(x)=x\tan^2 x\sim x^3$$

选 B

2. 若函数 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{\alpha}{x}} & x<0\\ 0 & x=0\\ \dfrac{\sin x}{x^{\alpha}} & x>0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续，则常数 α 的取值范围为

$A.(-\infty,0)$　$B.(0,+\infty)$　$C.(0,1)$　$D.(1,+\infty)$

【解答】$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而有

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$$
$$\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{\alpha}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}=0$$

得 $0<\alpha<1$

选 C

3. 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-2x)}{x}=$

$A.-4$　$B.-1$　$C.1$　$D.4$

【解答】由 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，得 $f(1)=0$

从而 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$，$f'(1)=2$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1-2x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(1-2x)-f(1)}{x}=-2f'(1)=-4$$

选 A

4.若函数 $f(x)=\begin{cases}ax+b & x\le 0\\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则常数 a,b 的值分别为

$A.-\frac{1}{2},1$ $B.\frac{1}{2},1$ $C.-2,0$ $D.0.1$

【解答】$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

从而有 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)\\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\end{cases}$

$$\begin{cases}b=1\\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}\end{cases}$$

$$\begin{cases}b=1\\ a=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

选 A

5.设 $y=f(\frac{1}{x})$，其中 f 函数具有二阶导数，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$

$A.\frac{2}{x^3}f'(\frac{1}{x})-\frac{1}{x^2}f''(\frac{1}{x})$ $B.-\frac{2}{x^3}f'(\frac{1}{x})-\frac{1}{x^2}f''(\frac{1}{x})$

$C.\frac{2}{x^3}f'(\frac{1}{x})+\frac{1}{x^4}f''(\frac{1}{x})$ $D.-\frac{2}{x^3}f'(\frac{1}{x})+\frac{1}{x^4}f''(\frac{1}{x})$

【解答】

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{x^3}f'(\frac{1}{x})+\frac{1}{x^4}f''(\frac{1}{x})$$

选 C

6. 设常数 $p\in(0,1)$，则反常积分 $I_1=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx, I_2=\int_1^{+\infty}p^x dx$ 的敛散性为

$A.I_1$与I_2都收敛　　$B.I_1$与I_2都发散

$C.I_1$收敛，I_2发散　$D.I_1$发散，I_2收敛

【解答】

$$0<p<1$$

$$I_1=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^{+\infty}=+\infty,\text{发散}$$

$$I_2=\int_1^{+\infty}p^x dx=\frac{p^x}{\ln p}\Big|_1^{+\infty}=-\frac{p}{\ln p},\text{收敛}$$

选 D

7. 下列级数发散的是

$A.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$　　$B.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$C.\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n})$　$D.\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$

【解答】

$A.\frac{1}{n^2+n}\sim\frac{1}{n^2},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$ 收敛

$B.$交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛

$B.\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{6n^3},\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n})$收敛

$C.\ln\frac{n+1}{n}\sim\frac{1}{n},\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$发散

选 D

8. 二次积分 $I=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x^2+y^2)dy$ 在极坐标系下可表示为

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(\rho^2)\rho d\rho$　B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1} f(\rho^2)\rho d\rho$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\sin\theta}^{1-\cos\theta} f(\rho^2)\rho d\rho$　D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{1-\cos\theta}^{\sin\theta} f(\rho^2)\rho d\rho$

【解答】令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$x+y=1, r=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$

选 B

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9.设 $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{k}{x}) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$，则常数 $k=$________

【解答】答案为：3

10.已知 $\vec{a}=(2,-3,4), \vec{b}=(2,2,-1)$，则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=$__________。

【解答】

$\vec{a}=(2,-3,4), \vec{b}=(2,2,-1)$

$\vec{a}+\vec{b}=(4,-1,3)$

$\vec{a}-\vec{b}=(0,-5,5)$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=20$

答案为：20

11.设函数 $f(x)=\dfrac{x^{2021}-1}{x}$，则 $f^{(2021)}(1)=$__________。

【解答】

$$f(x)=\frac{x^{2021}-1}{x}=x^{2020}-x^{-1}$$
$$f'(x)=2020x^{2019}-(-1)x^{-2}$$
$$f''(x)=2020\cdot 2019x^{2018}-(-1)(-2)x^{-3}$$
……
$$f^{(2021)}(x)=-(-1)^{2021}2021!x^{-2022}$$
$$f^{(2021)}(1)=2021!$$

答案为：2021！

12.设曲线$\begin{cases}x=3+t+t^2\\y=12+10t-2t^2\end{cases}$在点$P$处的切线方程为$y=2x+10$，则切点$P$的坐标为___。

【解答】

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{10-4t}{1+2t}$$
令$\frac{10-4t}{1+2t}=2$，$t=1$

$P(5,20)$

答案为：（5,20）

13.设$\ln(1+x^2)$是函数$f(x)$的一个原函数，则$\int_0^1 f'(x)dx=$________。

【解答】

$$f(x)=(\ln(1+x^2))'=\frac{2x}{1+x^2}$$
$$\int_0^1 f'(x)dx=\frac{2x}{1+x^2}\Big|_0^1=1$$

答案为：1

14.设常数$a>0$，若幂函数$\sum\frac{(x-1)^n}{a^n}$的收敛区间为$(-1,3)$，则$a=$________。

【解答】由题意幂函数$\sum\frac{(x-1)^n}{a^n}$的收敛半径为2，

又 $R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{a^n}=a$

答案为：2

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

15.求极限 $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\arctan x}\right)$。

【解答】$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\arctan x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}=-\frac{1}{3}$

16.求不定积分 $\int x\cos(2x-3)dx$。

【解答】

$$\int x\cos(2x-3)dx=\frac{1}{2}\int xd\sin(2x-3)=\frac{1}{2}x\sin(2x-3)-\frac{1}{2}\int\sin(2x-3)dx$$

$$=\frac{1}{2}x\sin(2x-3)+\frac{1}{4}\cos(2x-3)+C$$

17.求定积分 $\int_1^2\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$。

【解答】令 $\sqrt{x-1}=t,x=t^2+1$

$$\int_1^2\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx=\int_0^1\frac{2t^2}{t^2+1}dt=2\int_0^1(1-\frac{1}{t^2+1})dt=2-2arctanx|_0^1=2-\frac{\pi}{2}$$

18.已知直线 L 在平面 $\prod_1:x+y+z-1=0$ 上，且通过平面 $\prod_1$ 与 x 轴的交点，又与平面 $\prod_2:x+2y+3z+6=0$ 平行，求直线 L 的方程。

【解答】平面 $\prod_1$ 与 x 轴的交点为 $(1,0,0)$

$$s=\vec{n_1}\times\vec{n_1}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\1&2&3\end{vmatrix}=(1,-2,1)$$

所求直线方程为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$

19.设 $z=y^3f(\frac{x}{y},e^x)$ 函数，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

【解答】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^3[\frac{1}{y}f_1'+e^xf_2']=y^2f_1'+e^xy^3f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2yf_1'+y^2f_{11}''\cdot(-\frac{x}{y^2})+3e^xy^2f_2'+e^xy^3f_{21}''\cdot(-\frac{x}{y^2})$$

$$=2yf_1'+3e^xy^2f_2'-xf_{11}''-xe^xyf_{21}''$$

20. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^3-3x^2z-6yz+3x-3y=1$ 所确定的二元函数，求 $dz\big|_{\substack{x=0\\y=0}}$。

【解答】当 $x=0,y=0$ 时，$z=1$

方程两边对 x 求导：

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-6xz-3x^2\frac{\partial z}{\partial x}-6y\frac{\partial z}{\partial x}+3=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xz-1}{z^2-x^2-2y},\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=-1$$

方程两边对 y 求导：

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial y}-3x^2\frac{\partial z}{\partial y}-6z-6y\frac{\partial z}{\partial y}-3=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2z+1}{z^2-x^2-2y},\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=3$$

从而有：$dz\big|_{\substack{x=0\\y=0}}=-dx+3dy$

21. 计算二重积分 $\iint\limits_D(x+y)dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x^2(x\le 0)$ 与直线 $y=x$ 及 $y=1$ 所围成的平面闭区域。

【解答】

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{y}(x+y)dx = \int_0^1 dy[\frac{x^2}{2}\Big|_{\sqrt{y}}^{y} + y(y+\sqrt{y})]$$

$$= \int_0^1 (\frac{y^2}{2} - \frac{y}{2} + y^2 + y^{\frac{3}{2}})dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{13}{20}$$

22.设函数 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''-3y'+2y=0$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=1$ 的特解，求微分方程 $y''-3y'+2y=f(x)$ 的通解。

$r^2-3r+2=0$，特征根为 $r_1=1, r_2=2$

齐次方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

$y'=C_1e^x+2C_2e^{2x}$

由题意，得 $\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ C_1+2C_2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} C_1=1 \\ C_2=0 \end{cases}$

从而有 $f(x)=e^x$

对于非齐次方程，由 $\lambda=1$ 是特征单根，

令非齐次方程 $y''-3y'+2y=e^x$ 特解形式为 $y^*=Axe^x$

$y^{*'}=A(x+1)e^x, y^{*''}=A(x+2)e^x$

代入非齐次方程，$A(x+2)-3A(x+1)+2Ax=1$，从而有 $A=-1, y^*=-xe^x$

所求非齐次方程的通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{2x}-xe^x$

四、证明题（本大题 10 分）

23.证明：当 $x>0$ 时，$2-\frac{e}{x}\le \ln x \le \frac{x}{e}$。

【解答】

$$V(a)=\pi\int_0^{\frac{1}{a^2+1}} ay\,dy+\pi\int_{\frac{1}{a^2+1}}^{1}\frac{1-y}{a}dy=\frac{\pi}{2}\frac{a}{(a^2+1)^2}+\frac{\pi}{a}(1-\frac{1}{a^2+1})-\frac{\pi}{2a}[1-\frac{1}{(a^2+1)^2}]$$

$$=\frac{\pi}{2}\frac{a}{(a^2+1)^2}+\frac{\pi}{2a}-\frac{\pi}{a}\frac{1}{a^2+1}+\frac{\pi}{2a(a^2+1)^2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\frac{a^2+a^4+2a^2+1-2(a^2+1)+1}{a(a^2+1)^2}=\frac{\pi}{2}\frac{a^4+a^2}{a(a^2+1)^2}=\frac{\pi}{2}\frac{a}{a^2+1}$$

（2） $V'(a)=\frac{\pi}{2}\frac{a^2+1-2a^2}{(a^2+1)^2}=\frac{\pi}{2}\frac{1-a^2}{(a^2+1)^2}=\frac{\pi}{2}\frac{(1+a)(1-a)}{(a^2+1)^2}$

令 $V'(a)=0$，得 $a=1$

当 $0<a<1$ 时，$V'(a)>0$

当 $a>1$ 时，$V'(a)<0$

从而有 $a=1$ 为 $V(a)$ 的最大值点

此时 $S=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-x^2-x^2)dx=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{3}x^3\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

25.设可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+\int_0^x tf(t)dt=1$，求：

（1）函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间与拐点；

（3）曲线 $y=f(x)$ 的渐近线。

【解答】（1）方程 $f(x)+\int_0^x tf(t)dt=1$ 两边对 x 求导

$$f'(x)+xf(x)=0$$

$$\frac{df(x)}{f(x)}=-xdx$$

$$\int\frac{df(x)}{f(x)}=\int -xdx$$

$$\ln f(x)=-\frac{x^2}{2}+\ln C$$

$$f(x)=Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

再由原方程，得 $f(0)=1$，从而有 $C=1$

（2）$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}, f''(x)=-e^{-\frac{x^2}{2}}+x^2e^{-\frac{x^2}{2}}=(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$

令$f''(x)=0$，得$x=\pm 1$

当$-\infty<x<-1$时，$f''(x)>0$

当$-1<x<1$时，$f''(x)<0$

当$1<x<+\infty$时，$f''(x)>0$

从而有曲线 $y=f(x)$ 的凹区间为：$(-\infty,-1],[1,+\infty)$；凸区间为$[-1,1]$；

拐点为$(-1,e^{-\frac{1}{2}}),(1,e^{-\frac{1}{2}})$

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}=0$，从而有水平渐近线 $y=0$

无垂直渐近线。