



2021 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(一)

第 I 卷(选择题,共 40 分)

一、选择题(1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+bx)}{x} = 2$, 则 $b =$ 【 】

- A. 2
- B. 1
- C. $\frac{1}{2}$
- D. -2

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x^2$ 为 x 的 【 】

- A. 低阶无穷小量
- B. 等价无穷小量
- C. 同阶但不等价无穷小量
- D. 高阶无穷小量

3. 设函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2(x-1)} = 1$, 则 $f'(1) =$ 【 】

- A. 2
- B. 1
- C. $\frac{1}{2}$
- D. -1

4. 设 $y = x + e^{-x}$, 则 $dy|_{x=1} =$ 【 】

- A. $e^{-1} dx$
- B. $-e^{-1} dx$
- C. $(1 + e^{-1}) dx$
- D. $(1 - e^{-1}) dx$



5. 曲线 $y = x \ln x$ 在点 (e, e) 处法线的斜率为 【 】

- A. -2 B. $-\frac{1}{2}$
 C. $\frac{1}{2}$ D. 2

6. $\int (\cos x)^2 dx =$ 【 】

- A. $\sin x + C$ B. $\cos x + C$
 C. $-\sin x + C$ D. $-\cos x + C$

7. $\int_{-1}^1 (x \cos x + 1) dx =$ 【 】

- A. -2 B. -1
 C. 1 D. 2

8. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx =$ 【 】

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$
 C. $-\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{2}$

9. 设 $z = y^3 + \arctan x$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ 【 】

- A. $3y^2 + \frac{1}{1+x^2}$ B. $\frac{1}{1+x^2}$
 C. $3y^2$ D. $3y^2 + \arctan x$

10. 设 $z = e^{2xy}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ 【 】

- A. $-e^{2xy}$ B. e^{2xy}
 C. $-2e^{2xy}$ D. $2e^{2xy}$

第 II 卷 (非选择题, 共 110 分)

二、填空题 (11 ~ 20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+1}{x^2+2x+3} =$ _____.



12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n}{2n^2 + 4n + 5} = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 设函数 $f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$, 则 $f(x)$ 的间断点为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 设 $y = xe^x$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $y + e^y = x$ 所确定的隐函数, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 曲线 $y = \frac{1}{x-2}$ 的铅直渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

17. $\int xe^x dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

18. $\frac{d}{dx} \left(\int_2^x \tan t dt \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

19. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

20. 过坐标原点且与平面 $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行的平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题(21 ~ 28 题, 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} 2ax + a^2, & x > 1, \\ -x, & x \leq 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处连续, 求 a .



22. (本题满分 8 分)

设 $y = \frac{\ln x}{x}$, 求 dy .

23. (本题满分 8 分)

计算 $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

24. (本题满分 8 分)

求曲线 $y = 2x^3 - 6x^2$ 的凹、凸的区间及拐点.



25. (本题满分 8 分)

设 $z = \ln(x + y^2)$, 求 $dz|_{(1,1)}$.

26. (本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2$ 的通解.

27. (本题满分 10 分)

计算 $\iint_D xy dx dy$, 其中 D 是由 $x = 0, y = x$ 和 $x^2 + y^2 = 1$ 在第一象限所围成的闭区域.

28. (本题满分 10 分)

将 $y = e^{-x}$ 展开成 x 的幂级数.



参考答案及解析

一、选择题

1. [答案] A

【考情点拨】 本题考查了等价无穷小的代换的知识点.

【应试指导】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+bx) \sim bx$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+bx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{x} = b = 2$.

2. [答案] D

【考情点拨】 本题考查了高阶无穷小量的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, 故当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x^2$ 为 x 的高阶无穷小量.

3. [答案] A

【考情点拨】 本题考查了函数的导数的知识点.

【应试指导】 $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2(x-1)} = 2$.

4. [答案] D

【考情点拨】 本题考查了函数的微分的知识点.

【应试指导】 $dy = (x + e^{-x})' dx = (1 - e^{-x}) dx$, 因此 $dy \Big|_{x=1} = (1 - e^{-1}) \Big|_{x=1} dx = (1 - e^{-1}) dx$.

5. [答案] B

【考情点拨】 本题考查了曲面的法线的知识点.

【应试指导】 $y' = (x \ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$, 因此曲线在点 (e, e) 处切线的斜率为 $y' \Big|_{x=e} = (\ln x + 1) \Big|_{x=e} =$

2, 故其法线的斜率为 $-\frac{1}{2}$.

6. [答案] B

【考情点拨】 本题考查了不定积分的基本性质的知识点.

【应试指导】 $\int (\cos x)' dx = \int d(\cos x) = \cos x + C$.

7. [答案] D

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 $\int_{-1}^1 (x \cos x + 1) dx = \int_{-1}^1 x \cos x dx + \int_{-1}^1 dx = \int_{-1}^1 dx = x \Big|_{-1}^1 = 2$.

8. [答案] A

【考情点拨】 本题考查了广义积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{-3+1} x^{-2+1} \Big|_1^{+\infty} = -\left(0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

9. [答案] C

【考情点拨】 本题考查了二元函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial y} = (y^4)' = 5y^4$.

10. [答案] C

【考情点拨】 本题考查了二元函数的高阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{2-x} + 2 = 2e^{2-x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2e^{2-x} \cdot (-1) = -2e^{2-x}$.



二、填空题

11. 【答案】 $\frac{1}{3}$

【考情点拨】 本题考查了函数极限的四则运算的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1}{x^2+2x+3} = \frac{0+1}{0+0+3} = \frac{1}{3}$.

12. 【答案】 $\frac{3}{2}$

【考情点拨】 本题考查了函数极限的四则运算法则的知识点.

【应试指导】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+5n}{2n^2+4n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{5}{n}}{2+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}} = \frac{3}{2}$.

13. 【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了函数的间断点的知识点.

【应试指导】 函数在 $x=0$ 处无定义,故其间断点为 $x=0$.

14. 【答案】 $(x+1)e^x$

【考情点拨】 本题考查了函数导数的知识点.

【应试指导】 $y' = (xe^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$.

15. 【答案】 $\frac{1}{1+e^x}$

【考情点拨】 本题考查了隐函数的求导的知识点.

【应试指导】 方程两边对 x 求导,得 $y' + e^x \cdot y' = 1$,即 $y' = \frac{1}{1+e^x}$.

16. 【答案】 $x=2$

【考情点拨】 本题考查了曲线的铅直渐近线的知识点.

【应试指导】 当 $x \rightarrow 2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = \infty$,故 $x=2$ 为曲线的铅直渐近线.

17. 【答案】 $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的第一换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$.

18. 【答案】 $\tan x$

【考情点拨】 本题考查了变上限定积分的性质的知识点.

【应试指导】 $\frac{d}{dx} \left(\int_0^x \tan t dt \right) = \tan x$.

19. 【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

20. 【答案】 $3x-7y+5z=0$

【考情点拨】 本题考查了平面方程的知识点.

【应试指导】 已知所求平面与 $3x-7y+5z-12=0$ 平行,则其法向量为 $(3,-7,5)$,故所求方程为 $3(x-0)+(-7)(y-0)+5(z-0)=0$,即 $3x-7y+5z=0$.

三、解答题

21. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2ax + a^2) = 2a + a^2$,

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x) = -1$.



由于 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续,

所以 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, 即 $2a + a^2 = -1$.

解得 $a = -1$.

$$22. y' = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

$$dy = y' dx = \frac{1 - \ln x}{x^2} dx,$$

23. 令 $t = \sqrt{x}$, 则 $x = t^2, dx = 2t dt$,

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{2t \cos t}{t} dt \\ &= 2 \int \cos t dt \\ &= 2 \sin \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

24. $y' = 6x^2 - 12x, y'' = 12x - 12$.

由 $y'' = 12x - 12 = 0$ 得 $x = 1$.

当 $x < 1$ 时, $y'' < 0$, 因此在区间 $(-\infty, 1)$ 曲线是凸的;

当 $x > 1$ 时, $y'' > 0$, 因此在区间 $(1, +\infty)$ 曲线是凹的;

当 $x = 1$ 时, $y = -4$, 点 $(1, -4)$ 为曲线的拐点.

$$25. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x+y}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x+y},$$

$$\text{于是 } dz = \frac{1}{x+y} dx + \frac{2y}{x+y} dy.$$

$$\text{因此 } dz \Big|_{(1,1)} = \frac{1}{2} dx + dy.$$

26. 原方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0$,

特征根为 $r_1 = 1, r_2 = 2$.

故原方程对应的齐次方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$,

$y^* = 1$ 为原方程的特解.

所以原方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 1$.

27. 在极坐标系中, D 可表示为 $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1$.

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \cos \theta \sin \theta \cdot r dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d(\sin \theta) \cdot \int_0^1 r^3 dr \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

28. $e^{x+1} = e \cdot e^x$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} x^n \quad (-\infty < x < +\infty).$$