

2020 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学（二）

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。满分 150 分。考试时间 150 分钟。

题 号	一	二	三	总分	统分人签字
分 数					

第 I 卷（选择题，共 40 分）

得分	评卷人

一、选择题(1~10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{3x}} =$

【 】

A. $e^{\frac{3}{2}}$

B. $e^{\frac{2}{3}}$

C. $e^{\frac{1}{6}}$

D. e^6

2. 设函数 $y = x + 2 \sin x$, 则 $dy =$

【 】

A. $(1 - 2 \cos x) dx$

B. $(1 + 2 \cos x) dx$

C. $(1 - \cos x) dx$

D. $(1 + \cos x) dx$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 2} =$

【 】

A. $\frac{3}{2}$

B. 1

C. 2

D. $\frac{1}{2}$

4. 设函数 $f(x) = 3 + x^5$, 则 $f'(x) =$

【 】

A. x^4

B. $1 + x^4$

C. $\frac{1}{5}x^4$

D. $5x^4$

5. 设函数 $f(x) = 2 \ln x$, 则 $f'(x) =$

【 】

A. $\frac{2}{x^2}$

B. $-\frac{2}{x^2}$

C. $\frac{1}{x^2}$

D. $-\frac{1}{x^2}$

6. $\int_{-2}^2 (1 + x) dx =$

【 】

A. 4

B. 0

C. 2

D. -4

7. $\int \frac{3}{x^5} dx =$

【 】



A. $\frac{3}{4x^4} + c$ B. $\frac{3}{5x^4} + c$ C. $-\frac{3}{4x^4} + c$ D. $-\frac{3}{5x^4} + c$

8. 把 3 本不同的语文书和 2 本不同的英语书排成一排, 则 2 本英语书恰好相邻的概率为 【 】

A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

9. 设函数 $z = x^2 - 4y^2$, 则 $dz =$ 【 】

A. $x dx - 4y dy$ B. $x dx - y dy$ C. $2x dx - 4y dy$ D. $2x dx - 8y dy$

10. 设函数 $z = x^3 + xy^2 + 3$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ 【 】

A. $3x^2 + 2xy$ B. $3x^2 + y^2$ C. $2xy$ D. $2y$

第 II 卷(非选择题, 共 110 分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. 设函数 $y = e^{2x}$, 则 $dy =$ _____.

12. 函数 $f(x) = x^3 - 6x$ 的单调递减区间为 _____.

13. 若函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 0, \\ a + \sin x, & x > 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} =$ _____.

15. $\int (3x + 2 \sin x) dx =$ _____.

16. 曲线 $y = \arctan(3x + 1)$ 在点 $(0, \frac{\pi}{4})$ 处切线的斜率为 _____.

17. $(\int_0^{2x} \sin t^2 dt)' =$ _____.

18. $\int_{-\infty}^1 e^x dx =$ _____.

19. 区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x^3\}$ 的面积为 _____.

20. 方程 $y^3 + \ln y - x^2 = 0$ 在点 $(1, 1)$ 的某邻域确定隐函数 $y = y(x)$, 则

$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} =$ _____.



得分	评卷人

三、解答题(21~28 题, 共 70 分, 解答应写出推理、验算步骤)

21. (本题满分 8 分)

计算 $\int x \sin x dx$.

22. (本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2}{2 \sin^2 x}$.

23. (本题满分 8 分)

已知函数 $f(x) = e^x \cos x$, 求 $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx$.



25. (本题满分 8 分)

设 D 为曲线 $y = \sqrt{x}$, 直线 $x = 4$, x 轴围成的有界区域, 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

26. (本题满分 10 分)

求函数 $z = x^2 + 2y^4 + 4xy^2 - 2x$ 的极值.

27. (本题满分 10 分)

求曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ 的凹凸区间与拐点.

28. (本题满分 10 分)

已知离散型随机变量 X 的概率分布为

且 $E(X) = 0$.

(1) 求 a, b ;

(2) 求 $E[X(X+1)]$.

X	-1	0	2
P	a	0.5	b



参考答案及解析

一、选择题.

1. 【答案】 B

【考点点拨】 本题考查了函数极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x} \cdot \frac{2}{3}} = \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x}} \right]^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}.$

2. 【答案】 B

【考点点拨】 本题考查了函数微分的知识点.

【应试指导】 $y' = (x + a \sin x)^1 = 1 + 2 \cos x$, 故 $dy = y' dx = (1 + 2 \cos x) dx$.

3. 【答案】 A

【考点点拨】 本题考查了分式函数的极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x^2-x+2} = \frac{-1^2+1+1}{1^2-1+2} = \frac{3}{2}.$

4. 【答案】 D

【考点点拨】 本题考查了一阶导数的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = (3+x^5)' = 5x^4.$

5. 【答案】 B

【考点点拨】 本题考查了二阶导函数的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = (2 \ln x)' = \frac{2}{x}$, $f''(x) = \left(\frac{2}{x}\right)' = -\frac{2}{x^2}.$

6. 【答案】 A

【考点点拨】 本题考查了牛顿-莱布尼茨公式的知识点.

【应试指导】 $\int_{-2}^2 (1+x) dx = \left(x + \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_{-2}^2 = 4.$

7. 【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{3}{x^5} dx = 3 \times \frac{1}{-5+1} x^{-5+1} + c = -\frac{3}{4x^4} + C.$

8. 【答案】 A

【考点点拨】 本题考查了随机事件的概率的知识点.

【应试指导】 2 本英语书恰好相邻的概率为 $\frac{A_4^4 \cdot A_2^2}{A_5^5} = \frac{2}{5}.$

9. 【答案】 D

【考点点拨】 本题考查了全微分的知识点.

【应试指导】 易知 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -8y$, 故 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2x dx - 8y dy.$

10. 【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了函数的偏导数的知识点.



【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot (y^2)' = 2xy$.

二、填空题

11. 【答案】 $2e^{2x} dx$.

【考点点拨】本题考查了函数微分的知识点。

【应试指导】 $y' = (e^{2x})' = 2e^{2x}$, 故 $dy = y' dx = 2e^{2x} dx$.

12. 【答案】 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

【考点点拨】本题考查了函数的单调性的知识点。

【应试指导】易知 $f'(x) = 3x^2 - 6$, 令 $f'(x) < 0$, 则有 $-2 < x < 2$, 故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

13. 【答案】 -2

【考点点拨】本题考查了分段函数连续性的知识点。

【应试指导】由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 故有 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, 而 $f(0) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 2) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + \sin x) = a$, 因此 $a = -2$.

14. 【答案】 1

【考点点拨】本题考查了函数极限的知识点。

【应试指导】 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 \rightarrow 0$, 故有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$.

15. 【答案】 $\frac{3}{2}x^2 - 2\cos x + C$

【考点点拨】本题考查了不定积分的知识点。

【应试指导】 $\int (3x + 2\sin x) dx = \frac{3}{2}x^2 - 2\cos x + C$.

16. 【答案】 $\frac{3}{2}$.

【考点点拨】本题考查了函数切线的知识点。

【应试指导】 $y' = [\arctan(3x + 1)]' = \frac{3}{1 + (3x + 1)^2}$, 故曲线在点 $(0, \frac{\pi}{4})$ 处的切线斜率为 $y'|_{x=0} = \frac{3}{1 + (3 \cdot 0 + 1)^2} \Big|_{x=0} = \frac{3}{2}$.

17. 【答案】 $2\sin(4x^2)$

【考点点拨】本题考查了定积分的性质的知识点。

【应试指导】 $\left(\int_0^{2x} \sin t^2 dx\right)' = \sin(2x)^2 \cdot (2x)' = 2\sin(4x^2)$.

18. 【答案】 e

【考点点拨】本题考查了反常积分的知识点。

【应试指导】 $\int_{-\infty}^1 e^x dx = e^x \Big|_{-\infty}^1 = e - 0 = e$.

19. 【答案】 $\frac{4}{3}$.

【考点点拨】本题考查了定积分的应用的知识点。

【应试指导】区域 D 的面积为 $\int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) \Big|_1^2 = \frac{4}{3}$.



20. 【答案】 $\frac{1}{2}$

【考点点拨】本题考查了隐函数求导的知识点.

【应试指导】方程两边对 x 求导, 得 $3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} - 2x = 0$, 即 $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3y^3+1}$, 故有 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 1 = \frac{2 \times 1 \times 1}{3 \times 1^3 + 1} = \frac{1}{2}$.

三、解答题

$$\begin{aligned} 21. \int x \sin x dx &= -\int x d(\cos x) \\ &= -(x \cos x - \int \cos x dx) \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2}{2 \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{2 x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 x^2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23. f'(x) &= e^x \cos x + e^x \cdot (\cos x)' \\ &= e^x \cos x - e^x \sin x \\ &= e^x (\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x (\cos x - \sin x) + e^x (\cos x - \sin x)' \\ &= e^x (\cos x - \sin x) + e^x (-\sin x - \cos x) \\ &= -2e^x \sin x \end{aligned}$$

$$\text{故有 } f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} = -2e^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\begin{aligned} 24. \int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx &= \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{3}} d(x+1) \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{3}} (1+x)^{\frac{1}{3}+1} \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{4} (1+x)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{4} \left(2^{\frac{4}{3}} - 1 \right). \end{aligned}$$

$$25. \text{区域 } D: 0 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 4,$$

$$\begin{aligned} \text{故所求旋转体的体积} &= \pi \cdot 4^2 \cdot 2 - \int_0^2 \pi x^2 dy \\ &= 32\pi - \int_0^2 \pi y^4 dy \\ &= 32\pi - \frac{\pi}{5} y^5 \Big|_0^2 \\ &= \frac{128}{5} \pi \end{aligned}$$

$$26. \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y^2 - 2, \frac{\partial z}{\partial y} = 8y^3 + 8xy$$



令 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 得驻点为 $(1,0), (-1,1), (-1,-1)$.

而 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24y^2 + 8x$,

在 $(1,0)$ 点, $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,0)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,0)} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(1,0)} = 8$,

$B^2 - AC = -16 < 0$, 且 $A > 0$

故函数在 $(1,0)$ 点有极小值, $Z_{\text{极小值}} = -1$;

在 $(-1,1)$ 点, $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-1,1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-1,1)} = 8, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-1,1)} = 16$,

$B^2 - AC = 32 > 0$, 故点 $(-1,1)$ 不是极值点;

在 $(-1,-1)$ 点, $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-1,-1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-1,-1)} = -8, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-1,-1)} = 16$,

$B^2 - AC = 32 > 0$, 故点 $(-1,-1)$ 不是极值点;

因此函数在 $(1,0)$ 点有极小值, $Z_{\text{极小值}} = -1$.

27. $y' = 3x^2 - 6x + 2, y'' = 6x - 6$

令 $y'' = 0$, 得 $x = 1$

当 $x > 1$ 时, $y'' > 0$, 故 $(1, +\infty)$ 为曲线的凹区间;

当 $x < 1$ 时, $y'' < 0$, 故 $(-\infty, 1)$ 为曲线的凸区间;

函数的拐点为 $(1,1)$.

28. (1) 由概率的性质可知 $a + 0.5 + b = 1$,

又 $E(X) = 0$, 得 $-1 \times a + 0 \times 0.5 + 2 \times b = 0$,

故有 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{6}$.

(2) $E[X(X+1)] = E(X^2 + X) = E(X^2) + E(X)$,

而 $E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2$

$$= \frac{1}{3} \cdot (-1 - 0)^2 + \frac{1}{2} \cdot (0 - 0)^2 + \frac{1}{6} \cdot (2 - 0)^2$$

$$= 1,$$

因此 $E[X(X+1)] = 1 + 0 = 1$.

