2017年成人高等学校专升本招生全国统一考试

高等数学（二）

第Ⅰ卷（选择题，共40分）

一、选择题(1～10小题。每小题4分，共40分。在每小题给出的四个选项中。只有一项是符合题目要求的)

1. 当$x\to 0$时，下列各无穷小量中与x^2等价的是（　　）

A. $x\sin^2 x$　　B. $x\cos^2 x$　　C. $x\sin x$　　D. $x\cos x$

2. 下列函数中，在$x=0$处不可导的是（　　）

A. $y=\sqrt[3]{x^5}$　　B. $y=\sqrt[5]{x^3}$　　C. $y=\sin x$　　D. $y=x^2$

3. 函数$f(x)=\ln(x^2+2x+2)$的单调递减区间是（　　）

A. $(-\infty,-1)$　　B.（-1，0）　　C.（0，1）　　D. $(1,+\infty)$

4. 曲线$y=x^3-3x^2-1$的凸区间是（　　）

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,-2)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

5. 曲线$y=e^{2x}-4x$在点（0，1）处的切线方程是（　　）

A. $2x-y-1=0$　　B. $2x+y-1=0$

C. $2x-y+1=0$　　D. $2x+y+1=0$

6. $\int\frac{1}{\sqrt{x^3}}dx=(\ )$

A. $\frac{2}{\sqrt{x}}+C$　　B. $-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$

C. $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$　　D. $-\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$

7. $\int_0^1 2^x dx=(\ )$

A. $\ln 2$　　B. $2\ln 2$　　C. $\frac{1}{\ln 2}$　　D. $\frac{2}{\ln 2}$

8. 设二元函数$z=e^{x^2+y}$，则下列各式中正确的是（　　）

A. $\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2}$　　B. $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{y}$

C. $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x^2+y}$　　D. $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2+y}$

9. 二元函数$z=x^2+y^2-3x-2y$的驻点坐标是（　　）

A. $\left(-\frac{3}{2},-1\right)$　　B. $\left(-\frac{3}{2},1\right)$

C. $\left(\frac{3}{2},-1\right)$　　D. $\left(\frac{3}{2},1\right)$

10. 甲、乙两人各自独立射击 1 次，甲射中目标的概率为 0.8，乙射中目标的概率为 0.9，则至少有一人射中目标的概率为（　　）

A. 0.98　B. 0.9　C. 0.8　D. 0.72

第Ⅱ卷（非选择题，共 110 分）

二、填空题：11～20 小题，每小题 4 分，共 40 分。将答案填写在答题卡相应题号后。

11. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^4+x^2-2}{4x^2+5x-8}=$______

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(3x+1)}=$______

13. 曲线$y=\frac{x+1}{(x-1)^2}$的铅直渐近线方程是=________

14. 设函数$f(x)=\sin(1-x)$，则$f''(1)=$______

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x dx=$______

16. $\int_{-1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=$______

17. 若 $\tan x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(x)dx =$ ______

18. 由曲线 $y = x^3$，直线 $x = 1$，x 轴围成的平面有界区域的面积为______

19. 设二元函数 $z = x^4 \sin y$，则 $dz\Big|_{\left(1,\frac{\pi}{4}\right)} =$ ________

20. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y = x + y$ 所确定的隐函数，则 $\frac{dy}{dx} =$ ______

三、解答题：21～28 题，共 70 分。解答应写出推理、演算步骤，并将其写在答题卡相应题号后

21. 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$

22. 已知函数 $f(x) = \cos(2x + 1)$，求 $f'''(0)$

23. 计算$\int \frac{1}{3\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

24. 计算$\int_0^1 x\arctan x dx$

25. 设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	0.3	0.4	0.3

求 X 的数学期望 E(X)及方差 D(X)

26. 已知函数 $f(x)=x^4-4x+1$

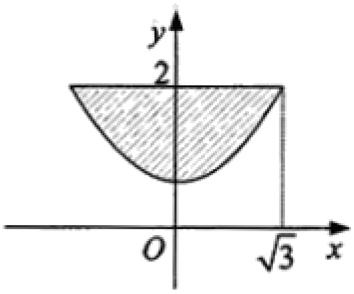
（1）求 $f(x)$ 的单调区间和极值

（2）求曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间

27. 记曲线 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ 与直线 $y=2$，所围成的平面图形为D（如图中阴影部分所示）。

（1）求D的面积S；

（2）求D绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积V



28. 设 $z=\frac{u}{v}$，其中 $u=x^2y$， $v=x+y^2$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 dz

2017年成人高等学校专升本招生全国统一考试

高等数学（二）试题答案解析

1.【答案】C

【解析】无穷小量等价，那么他们比值的极限为1

因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$，所以$x\sin x$与$x^2$等价

2.【答案】B

【解析】B选项，在$x=0$处$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\frac{3}{5}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{\frac{2}{5}}}=+\infty$，导数为无穷大，所以$y=\sqrt[5]{x^3}$在$x=0$不可导

3.【答案】A

【解析】可导函数单调递减区间导数值小于0，$f(x)=\ln\left(x^2+2x+2\right)$，

$f'(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}=\dfrac{2x+2}{(x+1)^2+1}<0$，解出$x<-1$，所以单调递减区间为$(-\infty,-1)$

4.【答案】A

【解析】凸函数的二阶导数小于0，已知$y=x^3-3x^2-1$，$y'=3x^2-6x$，$y''=6x-6$，令$y''=6x-6<0$，解出$x<1$，所以函数凸区间为$(-\infty,1)$

5.【答案】B

【解析】函数在某点的切线的斜率是该点的导数，斜率

$k=y'\big|_{x=0}=\left(2e^{2x}-4\right)\big|_{x=0}=-2$，所以切线方程为$2x+y-1=0$

6.【答案】B

【解析】$\int\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}=\int x^{-\frac{3}{2}}dx=-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+C$

7.【答案】C

【解析】$\int_0^1 2^x dx=\frac{1}{\ln 2}2^x\Big|_0^1=\frac{1}{\ln 2}$

8.【答案】D

【解析】$z=e^{x^2+y}$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2+y}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2+y}$

9.【答案】D

【解析】二元函数的驻点是一阶偏导数为 0 的点，即

$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2x-3=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y-2=0\end{cases}$，解出$\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\ y=1\end{cases}$，所以驻点为$\left(\frac{3}{2},1\right)$

10.【答案】A

【解析】设甲射中为事件 A，乙射中为事件 B

解法一：至少一人射中那么就表示甲射中乙不射中，乙射中甲不射中，

甲乙都射中，即$P=P\left(A\bar{B}+\bar{A}B+AB\right)=P\left(A\bar{B}\right)+P\left(\bar{A}B\right)+P(AB)$

$=0.8\times(1-0.9)+(1-0.8)\times 0.9+0.8\times 0.9=0.98$

解法二：至少一人射中的否定是甲、乙没有一个射中，即

$P=1-P\left(\bar{A}\bar{B}\right)=1-(1-0.8)\times(1-0.9)=1-0.02=0.98$

11.【答案】2

【解析】$\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^4+x^2-2}{4x^2+5x-8}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3+1-2}{4+5-8}=2$

12.【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】当$x\to 0$，分子分母都为 0，可以使用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(3x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}}{3x+1}=\frac{1}{3}$$

13.【答案】$x=0$

【解析】函数铅直渐近线可能出现在无穷处或者函数不连续处且极限值为∞，当$x\to\infty$时，$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{(x-1)^2}$洛必达法则$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2(x-1)}=\frac{1}{2}\neq\infty$（排除）

当$x\to 1$时，$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{(x-1)^2}$洛必达法则$\lim_{x\to 1}\frac{x}{2(x-1)}=\frac{1}{2}=\infty$

14.【答案】0

【解析】$f'(x)=\cos(1-x)(1-x)'=-\cos(1-x)$，$f''(x)=\sin(1-x)(1-x)'=-\sin(1-x)$，则$f''(1)=0$

15.【答案】$-\frac{1}{3}$

【解析】$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3xdx=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3xd(3x)=\frac{1}{3}\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{3}$

16.【答案】1

【解析】$\int_{-1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-2}dx=\lim_{b\to+\infty}-x^{-1}\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}-\left(\frac{1}{b}-1\right)=1$

17.【答案】$\tan x+C$

【解析】若$\tan x$是$f(x)$的一个原函数，则$\int f(x)dx=\tan x+C$

18.【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】所围成区域x取值范围是（0，1），$S=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}$

19.【答案】$2\sqrt{2}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}dy$

【解析】$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$，$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3\sin y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^4\cos y$，

$$dz\Big|_{\left(1,\frac{\pi}{4}\right)}=2\sqrt{2}dx+\frac{\sqrt{2}}{2}dy$$

20.【答案】$\frac{1}{e^y-1}$

【解析】方程 $e^y=x+y$ 两端同时对 x 求导 $e^y\frac{dy}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$，解出 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y-1}$

21.【答案】

解法一：当 $x\to0$ 时，分子分母都为零，可以使用洛必达法则

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x+\cos x-x\sin x}{\cos x}=2$$

解法二：当 $x\to0$ 时，$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2$，$\sin x=x$，$\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$

22.【答案】

$f(x)=\cos(2x+1)$，$f'(x)=-2\sin(2x+1)$，$f''(x)=-4\cos(2x+1)$，

$f'''(x)=8\sin(2x+1)$，$\therefore f'''(0)=8\sin1$

23.【答案】

$\int\frac{1}{3(1+\sqrt[3]{x})}dx$，令 $\sqrt[3]{x}=t$，$\int\frac{1}{3(1+t)}3t^2dt=\int\frac{t^2}{1+t}dt=\int\frac{t^2-1+1}{1+t}dt=\int(t-1)dt+\int\frac{1}{1+t}dt$

$=\frac{1}{2}t^2-t+\ln(1+t)$，即 $\int\frac{1}{3(1+\sqrt[3]{x})}dx=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)+C$

24.【答案】分部积分公式 $\int udv=uv-\int vdu$

$$\int_0^1x\arctan xdx=\int_0^1\arctan xd\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\arctan x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1x^2d(\arctan x)$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$$
$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1dx-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$$
$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

25.【答案】

$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=0\times0.3+1\times0.4+2\times0.3=1$

$E(X^2)=0\times0.3+1\times0.4+2^2\times0.3=1.6$

$dx=E(X^2)=E^2X=1.6-1=0.6$

26.【答案】

（1）函数 $f(x)=x^4-4x+1$，则 $f'(x)=4x^3-4$

令 $f'(x)<0$，解出 $x<1$，所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)$

令 $f'(x)>0$，解出 $x>1$，所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1,+\infty)$

函数在 $x=1$ 处取得极小值为 $f(1)=1-4+1=-2$

（2）$f''(x)=12x^2$，则 $f''(x)\geq0$，多以函数在 R 上为凹函数。

27.【答案】

（1）$S=2\int_0^{\sqrt{3}}\left[2-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)\right]dx=2\int_0^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\right)dx=2\sqrt{3}$

（2）$V=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}f^2(y)dy=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2y-1)dy=\pi\left(y^2-y\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{9}{4}\pi$

28.【答案】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2}\cdot2xy-\frac{x^2y}{\left(x+y^2\right)^2}=\frac{x^2y+2xy^3}{\left(x+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x+y^2}\cdot x^2-\frac{x^2y}{\left(x+y^2\right)^2}=\frac{x^3-x^2y^2}{\left(x+y^2\right)^2}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{x^2y+2xy^3}{\left(x+y^2\right)^2}dx+\frac{x^3-x^2y^2}{\left(x+y^2\right)^2}dy$$